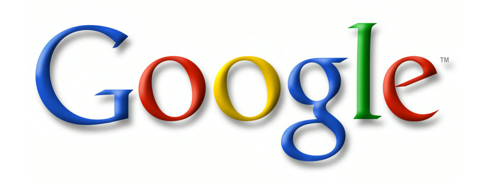



ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



11 reels
5/6

Camus, Charles Étienne Louis, 1699-1768.

COURS DE MATHÉMATIQUE.

TROISIEME PARTIE.

ÉLÉMENS DE *MECHANIQUE STATIQUE*.

TOME PREMIER,

Par M. CAMUS, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture & Honoraire de l'Académie de Marine.

NOUVELLE ÉDITION.



D'après la Copie de l'Imprimerie Royale.

A PARIS,

Chez DURAND, rue du Foin, la première porte cochère en entrant par la rue Saint Jacques, au Griffon.

M. DCC. LVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

LA Méchanique Statique, qui eſt le ſujet de la troiſième Partie de l'Ouvrage que M. le Comte d'Argenſon m'a ordonné d'entreprendre pour faciliter l'inſtruction des Ingénieurs, devoit naturellement commencer par l'examen des propriétés des Machines ſimples qui ſont utiles par elles-mêmes, & qui entrent dans la conſtruction des Machines compoſées : & ſi je n'avois eu à faire connoître les centres de gravité que relativement aux propriétés des Machines que je me propoſois d'expliquer, j'aurois pû, à l'exemple de preſque tous les Auteurs qui ont traité cette matière, inférer une théorie ſuccinte de ces centres dans celle du levier. Mais ayant conſidéré que les Ingénieurs n'ont pas ſeulement beſoin de connoître les centres de gravité par rapport aux machines, & qu'ils ont encore occaſion d'en faire des applications à la pratique de la Géométrie, j'ai jugé néceſſaire de les traiter dans une plus grande étendue que ne l'ont fait les Auteurs dont la lecture eſt à la portée des commençans : & comme la doctrine des centres de gravité n'a dans le fond pour objet que la compoſition & dé-

composition des forces parallèles, j'y ai ajoûté ce qu'il étoit nécessaire de faire connoître sur la composition & décomposition des forces dont les directions ne sont pas parallèles; en sorte que les deux Livres contenus dans ce Volume, & dont je vais rendre compte, forment un Traïté de la composition des forces & de leur décomposition.

Ce Traité commence par les Notions préliminaires qu'on doit avoir de l'objet général de la Méchanique Statique, de la manière de représenter les forces, des demandes par rapport aux directions des puissances & aux points dont on peut supposer que ces directions partent, & des axiomes sur lesquels la théorie de l'équilibre des machines est appuyée.

Le premier Livre qui ne regarde que les centres de gravité & leur usage dans la Géométrie pratique, est partagé en onze Chapitres.

Dans le premier Chapitre, j'expose les principes généraux sur les centres de gravité, ce qu'on entend par pesanteur, la manière dont on suppose qu'elle agit, & la situation que prennent les corps pesans.

Dans le second Chapitre, je cherche les centres de gravité des figures symmétriques & de celles dont les parties peuvent être considérées comme des figures symmétriques.

Le troisième Chapitre peut être regardé com-

me le fondement de la composition & décomposition des forces parallèles. J'y enseigne à trouver les centres de gravité des systèmes composés de plusieurs corps dont on connoît les poids & les centres de gravité particuliers.

Dans le quatrième Chapitre, qui n'est qu'une suite du précédent, j'enseigne à trouver les momens des corps & de leurs parties, & à déterminer leurs centres de gravité par le moyen de ces momens.

Le Chapitre cinquième est une application du précédent à la recherche des momens & des centres de gravité des arcs & des surfaces de différentes portions de cercle, de ceux de toutes les parties de la surface & de la solidité de la sphère.

Le sixième Chapitre est encore une application du quatrième à la recherche des centres de gravité des aires des segmens & secteurs elliptiques. J'y considère non-seulement les segmens & secteurs droits qui sont coupés en deux parties semblables & égales par l'un ou l'autre axe de l'ellipse, mais encore les segmens & secteurs obliques qui ne peuvent être coupés qu'en deux parties égales, & non semblables par des diamètres de l'ellipse; & j'y détermine les surfaces & les centres de gravité de tous ces segmens & secteurs, en les comparant avec des segmens & secteurs correspondans du cercle, dont on a trouvé les centres de gravité dans le Chapitre précédent.

Dans le ſeptième, je continue d'appliquer la théorie du quatrième à la recherche des centres de gravité & des ſolidités des ſegmens & ſecteurs droits ou obliques de ſphéroïdes elliptiques, en les comparant avec des ſegmens & ſecteurs correſpondans de ſphère dont les centres de gravité ont été trouvés dans le Chapitre cinquième.

Le Chapitre huitième eſt employé à déterminer les centres de gravité des ſegmens droits & obliques de la parabole & du ſphéroïde parabolique.

Le neuvième Chapitre eſt une théorie des mouvemens des centres de gravité, & n'eſt qu'une préparation aux deux derniers Chapitres, dans leſquels je parle des ſuperficies & des ſolides qui doivent leur génération à des mouvemens de lignes & de plans.

Dans le dixième, je fais voir que les mouvemens des lignes & des ſuperficies ne ſont pas tous propres à produire des ſurfaces & des ſolides: & après avoir déterminé les mouvemens auxquels on doit rapporter les quantités des étendues engendrées, j'en fais l'application à des exemples pour le parallélogramme, le triangle, le parallélépipède, la pyramide, le cone, les cones tronqués, & pour les ſuperficies & les ſolidités de quelques corps engendrés par des portions de cercles.

Enfin dans le onzième Chapitre, je continue

de faire uſage des centres de gravité pour découvrir des méthodes propres au toiſé des ſurfaces des dômes & des voûtes en arc de cloître formés par des mouvemens de moitiés d'anſes de panier ; j'y donne auſſi des méthodes pour toiſer les ſurfaces des mêmes voûtes, en ſuppoſant qu'elles ſont engendrées par des mouvemens de demi-ellipſes.

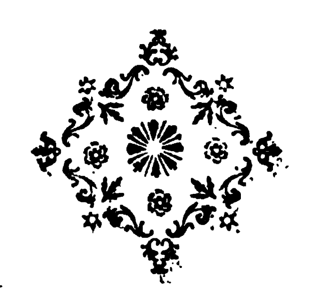
Mais comme ces méthodes ſont très-compoſées & difficiles à ſuivre dans la pratique, je ne les regarde que comme des moyens pour examiner ſi les règles reçûes ou qui peuvent être imaginées par les Praticiens, font trouver la ſurface de ces voûtes avec toute la juſteſſe qu'on peut raiſonnablement demander ; & je tire de la ſeconde de ces méthodes une règle auſſi ſimple & auſſi juſte qu'on peut la déſirer pour toiſer les ſuperficies des dômes & des voûtes en arc de cloître ſurbaiſſés & ſurmontés, lorſque leur montée n'eſt pas moindre que le quart de leur diamètre, ni plus grande que leur diamètre.

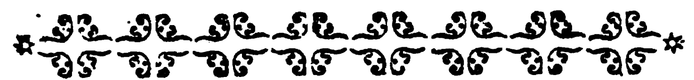
Les voûtes d'arête pouvant être conſidérées comme des berceaux dont on a retranché différens pans de voûte en arc de cloître, je déduis du toiſé de ces dernières voûtes des règles pour toiſer les ſurfaces des voûtes d'arête ; & je termine ce dernier Chapitre du premier Livre en indiquant quelques moyens pour trouver les ſolidités des voûtes en berceau, des voûtes en dôme

& en arc de cloître, & des voûtes d'arête en plein cintre ou surbaissées ou surmontées.

Le second Livre est partagé en deux Chapitres. Dans le premier, je parle de la composition & décomposition des forces dont les directions sont dans un même plan ou peuvent être réduites à un même plan; & dans le second, j'indique différens moyens pour réduire à deux forces seulement tant d'autres forces qu'on voudra, dont les directions sont dans différens plans & ne peuvent pas être réduites à un même plan.

Le second Volume de cette troisième Partie contiendra les Traités particuliers des sept machines, & les moyens de construire celles qui demandent le plus de perfection.





ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

De l'objet de la Méchanique Statique.

LA Méchanique en général est la Science du Mouvement & des Machines.

On appelle *Machine* tout instrument qui peut aider à mouvoir un corps, ou à le soûtenir en repos malgré l'effort que fait sa pesanteur pour le mouvoir.

Comme les Machines peuvent être en mouvement ou en repos, la Science qui les considère se divise en deux parties; la partie qui a pour objet les Machines en mouvement s'appelle simplement *Méchanique;* & celle qui traite des machines en repos se nomme *Méchanique Statique*, ou simplement *Statique:* c'est cette seconde partie de la Méchanique qui fera le sujet de cet Ouvrage.

On distingue deux sortes de Machines, les Machines simples & les Machines composées.

Les *Machines simples* sont d'une seule pièce ou n'ont qu'une pièce mobile; on en compte ordinairement six, le *Levier*, la *Poulie*, le *Tour*, le *Plan incliné*, la *Vis* & le *Coin*, auxquelles on peut ajoûter la

Machine funiculaire qu'on examinera la première, parce qu'on en fera usage dans presque toutes les autres. On définira ces Machines dans les Traités particuliers qu'on en donnera.

Les *Machines composées* sont celles qui sont faites de plusieurs Machines simples, ou de la même Machine simple répétée. Ces Machines sont en si grand nombre qu'il n'est pas possible d'en faire l'énumération, & encore moins de les traiter toutes.

Une Machine simple ou composée ne peut mouvoir un Corps ou le soûtenir, qu'avec l'aide d'un Agent que l'on nomme puissance.

On appelle *Puissance* tout ce qui peut mouvoir un Corps ou soûtenir l'effort de sa pesanteur, soit qu'on se serve de Machines ou qu'on ne s'en serve point.

On appelle *Force absolue* la Force qu'une Puissance exerce pour mouvoir un Corps ou une Machine; ainsi l'on peut prendre la Force absolue pour la Puissance ou pour l'Agent, lorsque cette Force est toute celle que l'Agent peut exercer.

Quoiqu'il y ait presque toûjours une grande différence entre la Puissance ou la Force dont l'agent est capable, & la Force absolue que l'Agent exerce véritablement, on ne distinguera point la Force absolue de la Puissance; c'est-à-dire qu'on ne considèrera l'Agent que par rapport à la Force absolue qu'il exercera sur un Corps ou sur une Machine, sans s'embarrasser s'il est capable d'appliquer une Force plus grande que celle qu'il emploie véritablement.

On nomme *Force relative* à un Corps ou à une Machine, celle que le point du Corps ou de la Machine, tiré ou poussé par la Puissance, reçoit dans le sens qu'il peut être mû.

Comme les Forces absolues ne sont pas toûjours appliquées aux Corps ou aux Machines dans le sens qu'on peut les mouvoir, ces forces que l'Agent exerce, sont souvent très-différentes des Forces relatives qui résultent à ces Corps ou à ces Machines.

La ligne droite suivant laquelle une Puissance tire ou pousse un Corps ou une Machine, se nomme la *Direction* de cette Puissance ou de la force absolue qu'elle exerce.

Lorsque plusieurs Forces appliquées à un Corps ou à une Machine, se contre-balancent de manière qu'aucune d'elles ne l'emporte sur les autres, & que le Corps ou la Machine reste immobile, on dit que ce Corps ou cette Machine est en *Equilibre*. On dit aussi que les Puissances qui se contre-balancent, sont en *Equilibre*.

Quoique la Méchanique Statique ne considère point le Mouvement dans les Machines, on reconnoîtra qu'elle est extrêmement utile, si l'on fait attention que

1°. Il y a des Machines dans lesquelles on considère principalement l'équilibre : telles sont toutes les espèces de balances qui sont en usage pour peser des marchandises.

2°. Il y a des Machines qui sont destinées à empêcher le Mouvement : tels sont les cerceaux dont on relie les vases qui renferment des liqueurs, & plusieurs autres Machines dont l'énumération seroit superflue.

3°. Entre les Machines qui servent à faciliter le Mouvement, il y en a qui ne doivent procurer qu'un Mouvement lent, dont il n'est pas nécessaire de connoître la vîtesse : & ces espèces de Machines n'ont pas

besoin d'autre considération que de celle qu'on peut faire sur leur équilibre. Car lorsqu'on aura trouvé quelle Puissance il faut appliquer à une Machine pour soûtenir un Poids en équilibre ; si la Machine est exempte de frottement, & des autres inconvéniens qui s'opposent au Mouvement ; on surmontera ce Poids, pour peu qu'on augmente la Puissance qui faisoit équilibre avec lui : au contraire si la Machine est sujette au frottement & à d'autres inconvéniens qui peuvent altérer le mouvement, la résistance que chaque empêchement causera, poutra être évaluée à un certain Poids de même espèce que celui qu'on voudra surmonter, & l'on trouvera pour chacun de ces Poids une Puissance propre à faire équilibre avec lui sur la Machine. Ainsi pour mouvoir la Machine & élever par son moyen un Poids proposé, il suffira d'employer une Puissance un peu plus grande que la somme de celles qui sont nécessaires pour soûtenir le Poids principal, & les autres Poids auxquels on aura évalué les résistances qui s'opposent au Mouvement.

4°. Si par le moyen d'une Machine on veut procurer à un Corps une vîtesse déterminée, la Statique ne sera point encore inutile ; car quoiqu'elle ne puisse pas faire trouver la grandeur de la Puissance capable de donner cette vîtesse par le moyen d'une Machine, elle aidera la Méchanique à trouver cette Puissance, en faisant voir comment elle agira par le moyen de la Machine sur le Corps qu'il faudra mouvoir. Ainsi quoique la Statique ne considère point le Mouvement dans les Machines, elle est nécessaire à la Méchanique pour déterminer ce Mouvement.

De la manière de repréſenter les Forces.

PLUSIEURS Auteurs fondés ſur cet Axiome de Phyſique, *les effets ſont proportionnels à leurs cauſes*, & conſidérant les chemins parcourus en temps égaux par un même Corps ou par des Corps égaux, comme les effets des Forces appliquées à ces Corps, ont cru devoir eſtimer les Puiſſances appliquées à un Corps, par les chemins que ces Puiſſances ſéparément priſes pourroient faire parcourir à ce Corps dans des temps égaux. Mais la Méchanique Statique étant une Science purement mathématique qui n'a pour objet que le repos des Corps ou l'équilibre des Puiſſances qui leur ſont appliquées, eſt abſolument indépendante du mouvement. Ainſi ſans avoir recours à des principes de Phyſique qui lui ſont d'autant plus étrangers qu'ils ſuppoſent le mouvement, nous nous contenterons de repréſenter les Forces par des lignes droites proportionnelles à ces Forces.

Pour repréſenter une Puiſſance, on doit avoir égard à deux choſes, à la quantité de force abſolue qu'elle exerce, & à la direction ſuivant laquelle elle agit.

Comme la Peſanteur eſt une Force, & que les Poids ſont des Meſures connues de peſanteur, on peut eſtimer par des poids la quantité de Force qu'une Puiſſance exerce. On peut dire, par exemple, qu'une Puiſſance eſt d'une livre ou de deux livres ou de trois livres &c. lorſqu'elle pouſſe ou tire avec la même Force qu'un Poids d'une livre ou de deux livres ou de trois livres &c.

Quoique l'eſtimation des quantités de Force que les Puiſſances exercent puiſſe ſe faire très-naturellement par des Poids capables de tirer ou de pouſſer

comme ces Puiſſances, & qu'on ne puiſſe pas les eſtimer autrement dans les Calculs, on ne ſe ſert point de Poids dans l'examen géométrique des Machines. Car dans cet examen tout devant être repréſenté par des Figures, & les Figures ne pouvant être compoſées que de Lignes, on eſt obligé de repréſenter les Puiſſances par des Lignes.

Pour que des Lignes repréſentent des Puiſſances, il faut qu'on y diſtingue deux choſes en même-temps; les Directions de ces Puiſſances, & leurs grandeurs ou les quantités de Force qu'elles exercent. Or des Lignes repréſenteront tout à la fois les directions des Puiſſances & leurs grandeurs, lorſqu'elles ſeront priſes ſur les directions mêmes de ces Puiſſances, & qu'elles auront des longueurs proportionnelles à ces Puiſſances.

Fig. 1. Par exemple, ſi deux Puiſſances *P*, Q appliquées à deux cordons *AP*, *A*Q tirent un Corps ou une Machine par un point *A*, & ſont l'une de deux livres, l'autre de trois livres; on prendra ſur les directions *AP*, *A*Q de leurs cordons deux parties *AB*, *AC* qui ſoient entr'elles comme 2 eſt à 3 : c'eſt-à-dire que pour repréſenter la Puiſſance *P* de deux livres, on prendra ſur ſa direction deux parties égales quelconques *AD*, *DB*; & que pour repréſenter la Puiſſance Q de trois livres, on prendra ſur ſa direction trois parties égales *AE*, *EF*, *FC* de même grandeur que les précédentes *AD*, *DB*. Alors les deux lignes *AB*, *AC* repréſenteront en même-temps les directions & les grandeurs des deux Puiſſances *P*, Q.

Il eſt évident que ſi l'on a plus de deux Puiſſances appliquées à une Machine ou à un Corps, il faudra repréſenter de la même manière chacune d'elles par

une partie de sa direction, & faire en sorte que les parties qu'on prendra sur les directions de toutes ces Puissances soient proportionnelles aux quantités de Force qu'elles exerceront.

Des principes de la Méchanique Statique.

LES Principes de la Méchanique Statique sont des Propositions simples sur lesquelles la théorie de cette Science est appuyée; il y en a de trois espèces, les Définitions, les Demandes & les Axiomes. Comme les Définitions sont répandues dans le corps de ce Traité, & placées aux endroits où elles sont nécessaires, on n'exposera ici que les Demandes & les Axiomes.

DEMANDES.

I.

Lorsqu'une Puissance P *tire ou pousse un Corps* M N *ou une Machine par un point* C *suivant une direction quelconque* C E; *on demande qu'il soit permis de considérer cette Puissance comme si elle étoit appliquée au Corps ou à la Machine en tout autre point* D *ou* E *de la même direction; qu'il soit même permis de la supposer appliquée à un point* A *situé au dehors du Corps ou de la Machine, & de considérer ce point* A *comme s'il étoit inébranlablement attaché au Corps ou à la Machine par une verge roide* A C *sans masse ni pesanteur, de manière que l'action de la Puissance* P *supposée appliquée à ce point, se communique toute entière au Corps* M N *ou à la Machine.* Fig. 2 & 3.

Il n'y a rien dans cette Demande qu'on puisse refuser d'accorder, puisque la Puissance P tirera toûjours le Corps *M N* ou la Machine suivant la même direction & avec la même force; & qu'on ne peut

considérer dans une Puissance que sa quantité de force & sa direction.

Fig. 4, 5, 6, 7 & 8. *Donc si les directions de deux Puissances* P, Q *appliquées à un même Corps* M N *sont dans un même plan, & se rencontrent ou concourent en un même point* A, *on pourra supposer que chacune de ces deux Puissances est appliquée au point* A *commun à leurs directions.*

Car si l'on imagine le point *A* lié avec le Corps *MN*, de manière que l'action de chaque Puissance sur ce point se communique au Corps *MN*, les Puissances P, Q tireront ou pousseront ce Corps par le point *A*, comme elles le tirent ou le poussent par les points *C*, *D* où elles sont appliquées.

II.

Qu'il soit permis de considérer les Corps & les Machines, comme s'ils n'avoient point de pesanteur, sauf à regarder la pesanteur de ces Corps ou de ces Machines, comme des Forces qui leur sont appliquées.

III.

Qu'il soit permis de considérer les cordes comme parfaitement flexibles, de regarder les surfaces sur lesquelles des Corps seront appuyés comme parfaitement dures & incapables de changer de figure, & de supposer inflexibles toutes les parties des Machines.

AXIOMES.

I.

Un même Point ne peut pas aller par plusieurs chemins à la fois.

Ainsi quel que soit le nombre des Puissances qui agiront

agiront à la fois sur un même Point suivant des directions quelconques, ou ce Point ne se remuera point, ou il n'ira que par un seul chemin, comme s'il n'étoit poussé ou tiré que par une seule Force équivalente à toutes les Puissances qui concourent à le mouvoir; d'où il suit qu'une seule Force appliquée à un Point, peut le mouvoir ou faire effort pour le mouvoir, de la même façon que plusieurs autres Forces qui lui seroient appliquées en même temps.

I I.

Deux Forces égales & directement opposées appliquées à la fois à un même Corps se détruisent mutuellement; & réciproquement lorsque deux Forces se détruisent mutuellement, elles sont égales & directement opposées.

Donc un Corps est en équilibre, lorsqu'il est tiré ou poussé par deux Forces égales & directement opposées; car les deux Forces égales appliquées à ce Corps se détruisant mutuellement, il doit rester immobile.

Et réciproquement lorsqu'un Corps tiré ou poussé par deux Forces seulement, reste immobile sans trouver d'autre obstacle à son mouvement que la contrariété des deux Forces qui lui sont appliquées, ces deux Forces sont égales & directement opposées; car sans cela les deux Forces ne détruiroient pas mutuellement leurs effets, & le Corps ne resteroit point immobile.

Puisque (*Ax.* I.) une seule Force peut produire le même effet que plusieurs autres Forces appliquées à la fois à un même Point; il est évident qu'un nombre quelconque de Forces appliquées en même temps à un Point, seront en équilibre, & laisseront ce Point

en repos, lorſqu'une d'elles ſera égale & directement oppoſée à la Force qui feroit le même effet que toutes les autres.

Et réciproquement lorſqu'un Point pouſſé ou tiré par un nombre quelconque de Forces reſte immobile, c'eſt une marque que chacune de ces Forces eſt égale & directement oppoſée à celle qui feroit le même effet que toutes les autres; car ſans cela quelqu'une de ces Forces l'emporteroit ſur les autres, & le Point ne reſteroit pas immobile.

III.

Un obſtacle invincible qu'on oppoſera à un Corps dans la direction ſuivant laquelle une Puiſſance tendra à mouvoir le Point auquel elle ſera appliquée, arrêtera néceſſairement ce Corps, & le mettra par conſéquent en équilibre; car cet obſtacle fermera au Point ſur lequel la Puiſſance agira, le ſeul chemin que cette Puiſſance pourroit lui faire ſuivre.

Il eſt évident qu'au lieu d'oppoſer au mouvement du Corps un obſtacle invincible qui peut réſiſter à toutes ſortes de Puiſſances quelque grandes qu'elles ſoient, il ſuffit pour l'équilibre d'oppoſer au mouvement de ce Corps, un obſtacle capable d'une réſiſtance égale à la Puiſſance qui tend à le mouvoir.

Et réciproquement, lorſqu'un Corps preſſé de ſe mouvoir par une Puiſſance qui lui eſt appliquée, ſe trouve arrêté par un obſtacle, & demeure par conſéquent en équilibre, cet obſtacle eſt placé dans la direction de la Puiſſance qui tend à mouvoir ce Corps.

Puiſque (*Ax. I.*) une ſeule Force peut mouvoir un Corps, de la même manière que pluſieurs autres Forces qui lui ſeroient appliquées à la fois; un obſta-

cle invincible ou d'une résistance égale à la Force qui feroit le même effet que toutes les Forces appliquées à un Corps, étant opposé à ce Corps dans la direction suivant laquelle toutes les Puissances appliquées à la fois s'accordent pour le mouvoir, arrêtera ce Corps & le mettra par conséquent en équilibre.

Il suit de là que pour mettre en équilibre tant de Puissances qu'on voudra qui agissent toutes à la fois sur un même Corps suivant des directions quelconques, il n'y a qu'à trouver suivant quelle ligne toutes ces Puissances s'accordent à pousser ou tirer le Corps, & opposer à ce Corps un obstacle invincible dans la direction de cette ligne. Et si l'on ne doit opposer au mouvement de ce Corps qu'un obstacle d'une résistance égale à la Force qu'il doit arrêter, il faudra trouver encore la quantité de la Force à laquelle toutes les Puissances se réduisent pour tirer ou pousser le Corps suivant la direction qu'elles s'accordent à lui donner. On verra dans le Livre second comment on peut trouver une telle Force.

Et réciproquement, lorsqu'un Corps pressé de se mouvoir par plusieurs Puissances appliquées à la fois, se trouve arrêté par quelque obstacle, ou demeure en équilibre, cet obstacle est placé dans la direction de la Force qui feroit le même effet que toutes les Puissances appliquées à la fois.

I V.

Lorsque plusieurs Forces appliquées à un même Corps, ont la même direction, c'est-à-dire que chacune d'elles tend à mouvoir un même point de ce Corps d'un même côté, on peut les regarder comme une seule Force égale à leur somme, & de même direction que ces Puissances.

Et réciproquement une Puissance appliquée à un Corps pourra être regardée comme l'assemblage de tant de Forces qu'on voudra, dont la somme sera égale à cette Puissance, & qui auront toutes la même direction qu'elle.

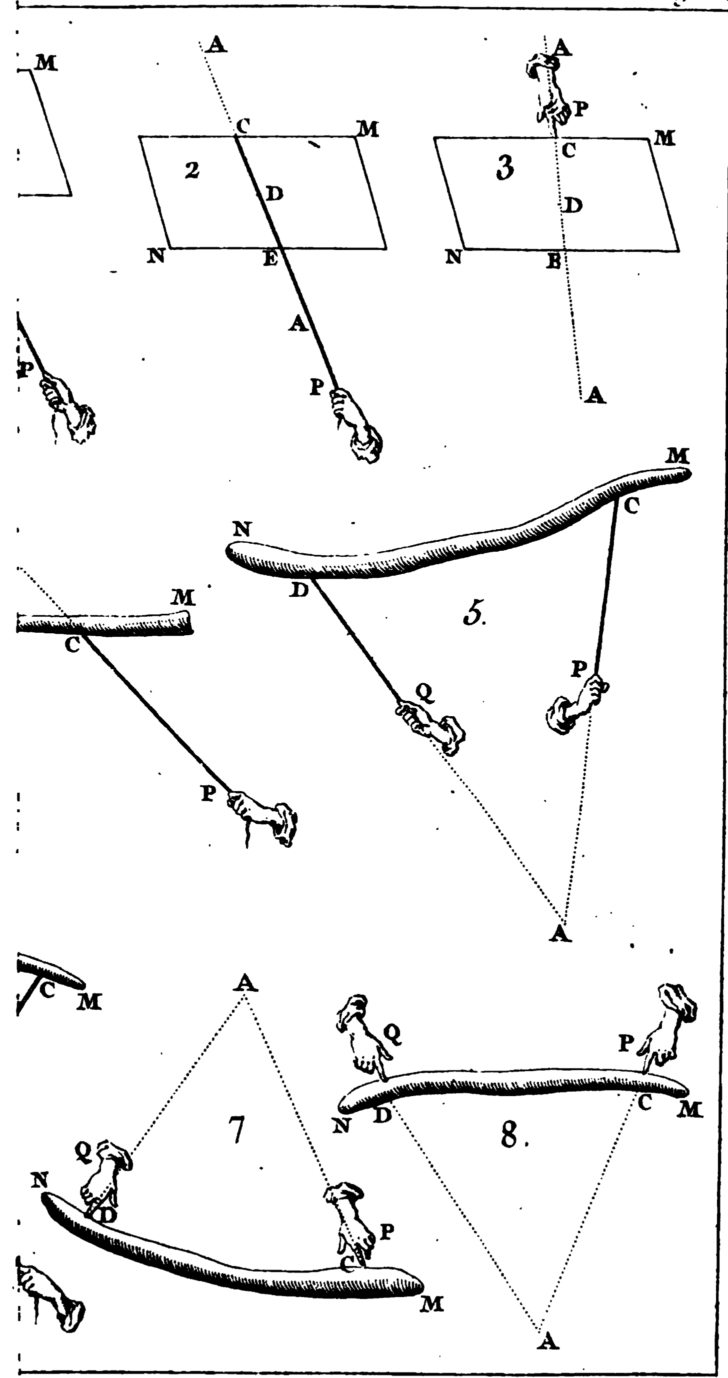
V.

Lorsque deux Puissances appliquées à un même Corps sont inégales, & directement opposées, il en résulte à ce Corps une Force égale à leur difference, & qui a la même direction que la plus grande de ces Puissances.

Ce cinquième Axiome peut être regardé comme une conséquence des deux précédens; car la plus grande des deux Puissances opposées peut être considérée comme la somme de deux Forces de même direction, dont l'une est égale à la Puissance opposée qu'elle détruira, & par laquelle elle sera réciproquement détruite; ainsi il ne restera qu'une Force égale à l'excès de la plus grande Puissance sur la plus petite, & de même direction que la plus grande dont elle fait partie.



ÉLÉMENS



M
A
C
M
2
D
N
E
A
P
P
A
P
C
M
3
D
N
B
A
M
C
N
D
5.
M
C
Q
P
P
P
A
C
M
A
7
Q
N
D
P
C
M
Q
P
N
D
8.
C
M
A



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE PREMIER.

Des Centres de Gravité.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux sur les Centres de gravité.

DÉFINITIONS.

I.

1. N appelle *Gravité* ou *Pesanteur*, la force qui tend à faire descendre les corps vers le centre de la Terre, & qui les meut effectivement ainsi, quand aucun obstacle ne s'y oppose.

2. Dans la théorie des centres de gravité, on suppose que la Pesanteur est une force constante qui agit par-tout également, même à différentes distances du centre de la Terre : on suppose aussi que les directions de l'action de la pesanteur sur toutes les parties d'un même corps, & sur les corps qui composent un même système, sont parallèles.

On a cependant observé que la pesanteur n'agit pas par-tout également ; & qu'elle est différente, non seulement à différentes distances du centre de la Terre, mais encore à la même distance de ce centre.

On sait par l'Astronomie physique, qu'un même corps ne pèse pas également à différentes distances du centre de la Terre : & comme toutes les parties d'un même corps ne peuvent pas être également éloignées de ce centre, toutes les parties égales d'un même corps, quoique homogènes, ne peuvent pas peser également dans la rigueur géométrique. Mais les différences de l'action de la pesanteur, à différentes distances du centre de la Terre, ne peuvent être sensibles que quand ces distances sont extrêmement différentes : & comme les corps dont on considèrera les centres de gravité, & qui composeront un même système, ne seront jamais assez éloignés les uns des autres, pour être exposés à des actions de la pesanteur sensiblement inégales, on peut supposer sans inconvénient, dans la doctrine des centres de gravité, que la pesanteur agit également à différentes distances du centre de la Terre.

On a observé aussi que les vibrations d'un même Pendule, sont plus lentes à l'Equateur qu'à l'Isle de Cayenne, plus lentes à Cayenne qu'à Paris, & encore plus lentes à Paris qu'au Cercle Polaire ; en sorte que l'action de la pesanteur sur la surface de la Terre, croît à mesure qu'on s'éloigne de l'Équateur, ou qu'on s'approche du Pole : & cela principalement à cause que la rotation de la Terre sur son axe procure aux corps pesans d'autant plus de force centrifuge, qu'ils sont plus voisins de l'Equateur, ou qu'ils décrivent de plus grands cercles ; & qu'une plus grande force centrifuge détruit une plus grande partie de la pesanteur propre d'un corps. Mais ce qui reste de pesanteur aux corps n'est sensiblement différent, qu'à des éloignemens de l'Equateur

qui different de plusieurs degrés; & un système de corps dont on considère le centre de gravité, accupe toujours un espace incomparablement plus petit qu'un degré. On peut donc supposer dans la théorie des centres de gravité, que la pesanteur de toutes les parties d'un même corps, ou des corps homogènes qui composent un même système, est égale, lorsque ces parties sont égales, ou que ces corps sont égaux.

Puisque (n°. 1) la pesanteur est une force qui tend à faire descendre les corps vers le centre de la Terre; il semble que l'on ne peut plus supposer que les directions de l'action de la pesanteur sur toutes les parties d'un même corps, ou sur les corps d'un même système, sont parallèles. Mais l'étendue d'un corps, ou d'un système composé de plusieurs corps, sera toujours si petite par rapport à la distance de ce corps au centre de la Terre, que les angles que feront ensemble les directions de la pesanteur, ne seront jamais sensibles; car un angle d'une seconde ne peut être aperçû que très-difficilement avec les meilleurs instrumens; & il faut une ligne de 16 toises sur la surface de la Terre, pour soûtenir un angle d'une seconde, qui auroit son sommet au centre de la Terre. On peut donc, sans craindre aucune erreur sensible, supposer dans la doctrine des centres de gravité, que les directions de l'action de la pesanteur sur les parties d'un même corps, ou sur les corps d'un même système, sont parallèles.

COROLLAIRE.

3. La Pesanteur étant une force constante, qui agit également sur toutes les parties égales d'un même corps, & toutes les directions de son action étant parallèles; il est clair que la pesanteur d'un corps est égale à la somme des pesanteurs de toutes ses parties. Ainsi l'on

ne changera rien à la pesanteur d'un corps, en changeant sa figure ou sa situation.

Fig. 1. Lorsqu'un corps *K* sera suspendu par un cordon *A B* attaché à ce corps en *B*; ce corps agira avec toute la force de sa pesanteur sur le crochet ou point de suspension *A*, par le moyen du cordon *A B*: & comme il agiroit de même avec toute sa pesanteur sur le même crochet *A*, si on l'attachoit à tout autre point, tel que *D* du cordon; il est évident qu'un corps qui pend librement au bout d'un cordon *A B*, agira toûjours également sur le point de suspension *A*, quelle que soit la longueur du cordon. On pourra donc, quand on le voudra, supposer nulle la longueur du cordon, & regarder le corps comme s'il pesoit immédiatement sur le point *A* du crochet. Enfin l'on pourra supposer que le cordon pend d'un point quelconque *E*, ou que la pesanteur du corps est appliquée à un point *E* placé au dessus du crochet, en imaginant que ce point *E* est lié avec le crochet par le moyen d'une verge inflexible *A E*, par laquelle le corps poussera le crochet de haut en bas, avec toute la force de sa pesanteur.

I I.

4. On appelle *Poids* une certaine mesure de pesanteur, comme une livre, deux livres, trois livres, &c.

On donne aussi communément le nom de *poids* à un corps pesant quelconque.

5. Quoiqu'il n'y ait dans la Nature que les corps qui soient pesans, & que les superficies, les lignes & les points ne soient point des corps, on regarde dans la Méchanique les superficies, les lignes & les points, comme des êtres pesans; ou plutôt on considère ce

qui arriveroit, si tous les points des superficies & des lignes étoient pesans; & l'on cherche en conséquence les centres de gravité de ces deux espèces d'étendues.

III.

6. La Ligne suivant laquelle agit la pesanteur, se nomme *Ligne verticale:* on la nomme aussi *Ligne à plomb;* parce que si l'on suspend un plomb, ou tout autre corps pesant par le moyen d'un fil, ce fil se placera dans la direction de l'action de la pesanteur, & représentera par conséquent une ligne verticale.

IV.

7. Le *Centre de gravité* d'un corps est un point par lequel ce corps étant soûtenu ou suspendu, reste immobile dans quelque situation qu'il soit; comme si toute la pesanteur de ce corps étoit réunie à ce point, & poussoit ce corps par ce seul point.

8. La Ligne verticale suivant laquelle la pesanteur d'un corps tend à faire descendre le centre de gravité, s'appelle *Direction de la pesanteur de ce corps.*

9. Toute droite qui passe par le centre de gravité d'un corps, s'appelle *Axe d'équilibre.* Comme on peut faire passer une infinité de lignes droites par un même point, il est évident qu'un même corps peut avoir une infinité d'axes d'équilibre différens.

10. Un plan qui passe par le centre de gravité d'un corps, ou par un axe quelconque d'équilibre, s'appelle *Plan d'équilibre.* Ainsi, comme on peut faire passer une infinité de plans différens par un même point, on peut considérer dans un même corps une infinité de plans différens d'équilibre.

11. *Nous verrons dans la ſuite que ſi la peſanteur eſt une force conſtante, & qu'elle agiſſe parallèlement ſur toutes les parties d'un même corps, comme nous le ſuppoſons, toute étendue conſidérée comme peſante, aura un centre de gravité tel que nous l'avons défini. Mais pour ne point laiſſer prendre de préjugé, il faut avertir que ſi la peſanteur, quoique ſuppoſée conſtante, ne pouvoit pas être ſuppoſée agir parallèlement ſur toutes les parties d'un même corps, aucun corps, excepté la ſphère, n'auroit un centre de gravité tel que nous l'avons défini.*

12. Le centre de gravité d'un corps peut être un des points de ce corps, ou bien être un point placé au dehors de lui. Une Sphère, par exemple, aura pour centre de gravité un de ſes propres points; & une verge courbe telle qu'une portion de cerceau, n'aura pas un de ſes points pour centre de gravité. Dans le dernier cas, on imagine que le centre de gravité eſt lié avec le corps, de manière qu'il n'en puiſſe point être ſéparé, & qu'il conſerve toujours la même ſituation par rapport à toutes les parties de ce corps. On dira la même choſe des axes & des plans d'équilibre, qu'on ſuppoſera ſi ſolidement liées avec le corps, qu'ils ne pourront point changer de ſituation par rapport à lui.

Comme chaque partie d'un même corps peſant eſt elle-même un corps peſant; chaque partie aura auſſi un centre de gravité particulier, dans lequel toute la peſanteur de cette partie ſera cenſée réunie; en ſorte que le centre de gravité du corps entier ſera le centre de gravité de tous les centres de gravité particuliers des parties dans leſquelles on ſuppoſera le corps diviſé.

13. De même que l'on imagine un corps unique divisé en plusieurs parties, dont chacune a son centre de gravité particulier; on imagine aussi que plusieurs corps bien distingués composent ensemble un seul & même corps, qui n'a qu'un centre de gravité, dans lequel la pesanteur de tous les corps particuliers est censée rassemblée.

Un corps ainsi composé de plusieurs autres corps, se nomme *Système de corps;* & son centre de gravité s'appelle *Centre de gravité du système:* enfin la ligne verticale tirée par le centre de gravité du système, & suivant laquelle la pesanteur du système feroit descendre ce centre, s'appelle *Direction de la pesanteur du système.*

14. Un système de corps, ayant un centre de gravité, aura aussi des axes d'équilibre & des plans d'équilibre.

Il pourra nous arriver dans la suite, de nommer simplement corps *un système de plusieurs corps, comme si tous ces corps n'étoient que les parties d'un même corps non divisé; & réciproquement nous pourrons donner le nom de* système de corps *à un seul corps, en regardant les parties de ce corps comme des corps particuliers.*

COROLLAIRE I.

15. Donc si l'on suspend un corps *K* par un fil *AB* attaché à un point quelconque *B* de ce corps; le corps *K* se placera de maniere que le fil *AB* sera vertical, & que le point fixe *A* d'où pend le fil, le point *B* par lequel le fil tient au corps, & le centre de gravité G de ce corps, seront tous trois dans la même direction verticale *AZ* du fil. Fig. 1.

Car (n°. 7) le centre de gravité G pouvant être regardé comme le ſeul point qui pèſe dans le corps K, la peſanteur pouſſera le corps K ſuivant la direction verticale G Z. Mais puiſque le corps ſuſpendu reſte immobile, malgré ſa peſanteur qui tend à le faire deſcendre; la réſiſtance du fil qui doit détruire l'effet de la peſanteur, ſe fait ſuivant une direction G A préciſément oppoſée à celle G Z de la peſanteur. Ainſi le fil doit agir ſuivant une ligne verticale G A; & par conſéquent les trois points A, B, G doivent être avec le fil A B dans une même ligne verticale A Z.

16. Si au lieu d'un corps unique K, on ſuſpend un ſyſtème de corps; il eſt clair que tout ce qu'on a dit du corps unique K, conviendra auſſi au ſyſtème de pluſieurs corps : c'eſt-à-dire que le point A d'où pendra le fil, le point B par lequel le fil ſoûtiendra le ſyſtème, & le centre de gravité de ce ſyſtème, ſeront tous trois avec le fil A B dans une même ligne verticale A Z; comme ſi le ſyſtème n'étoit qu'un ſeul corps, & que les corps particuliers du ſyſtème fuſſent les parties de ce corps.

Fig. 2. 17. Il en ſera de même, ſi un corps ou un ſyſtème de corps K eſt ſoûtenu par une ligne inflexible A B, qu'aucun appui latéral n'empêche de tomber. Le point A ſur lequel la ligne inflexible A B repoſera, le point B par lequel cette ligne ſoûtiendra le corps ou le ſyſtème de pluſieurs corps, & le centre de gravité G de ce corps ou de ce ſyſtème, ſeront tous trois dans une même ligne verticale A Z. Car la peſanteur du corps ou du ſiſtème K, agiſſant ſur ſon centre de gravité G, pouſſera ce corps ou ce ſyſtème ſuivant la ligne verticale G B. Or la ligne inflexible A B, qui eſt la ſeule

chose employée pour soûtenir le corps ou le système *K*, doit résister suivant une direction *A B* opposée à *G B*. Ainsi la direction *G B* de la pesanteur, & celle *A B* de la résistance de l'appui, devant être dans une même ligne verticale, les trois points *A*, *B*, *G*, seront dans une même ligne verticale *A Z*.

COROLLAIRE II.

18. Si plusieurs corps pesans *K*, *L*, *M*, &c. sont enfilés par un cordon ou ligne flexible qui tienne aux centres de gravité *G*, *H*, *I*, &c. de ces corps, & que le cordon soit attaché à un point fixe *A*, d'où il pende librement avec tous les corps qu'il soûtient; les centres de gravité *G*, *H*, *I*, &c. des corps suspendus, & le point fixe *A* d'où pendra le cordon, seront tous dans une même ligne verticale; en sorte que les parties *AG*, *GH*, *HI*, &c. du cordon, seront dans une même ligne droite verticale *AZ*: & le centre de gravité du système de tous ces corps sera aussi dans la même verticale *AZ*; ce qu'on démontre comme il suit. Fig. 3.

Lorsque le système composé de tous les corps *K*, *L*, *M*, &c. sera parvenu à demeurer immobile, & que tous ces corps auront pris les places qui leur conviennent; chaque corps pourra être regardé comme un appui fixe d'où pendra le corps inférieur. Alors le corps *M* le plus bas étant suspendu pat le cordon *HI*, se placera de manière que le centre de gravité *I* de ce corps, & le point fixe *H* qui est le centre de gravité du corps *L*, seront avec le fil *HI* dans une même ligne verticale (*n*°. 15).

Le cordon qui soûtient le corps *M* étant attaché en *H*, comme à un point fixe d'où il pend; on peut supposer (*n*°. 3) que toute la pesanteur de ce corps *M* est appliquée au point de suspension *H*, & qu'elle est

rassemblée en ce point avec celle du corps *L* qui a son centre de gravité en ce même point *H*. Donc (n°. 15) le point *H* où la pesanteur des deux corps *L*, *M* est rassemblée, & le point fixe G d'où pend le cordon *GH*, & qui est le centre de gravité du corps *K*, sont dans une même ligne verticale avec le cordon *GH*.

De même, puisque le point fixe G soûtient, au moyen du cordon *GH*, la pesanteur des deux corps *L*, *M*; on peut encore supposer que la pesanteur de ces deux corps est réunie avec celle du corps *K* au point d'appui G, qui est le centre de gravité de ce dernier. Ainsi (n° 15) le point G, par lequel le cordon soûtient le systême, & le point de suspension *A*, sont dans une même ligne verticale avec le cordon *AG*.

Donc les centres de gravité G, *H*, *I*, *&c.* par lesquels les corps *K*, *L*, *M*, *&c.* sont attachés au cordon flexible qui pend du point fixe *A*, sont dans une même ligne verticale avec ce point fixe *A*; & par conséquent les portions *AG*, *GH*, *HI*, *&c.* de ce cordon, sont aussi dans la même ligne verticale *AZ*.

Or les corps *K*, *L*, *M*, *&c.* dont nous venons de faire voir que les centres de gravité G, *H*, *I*, *&c.* sont avec le cordon *AG* dans une même ligne verticale *AZ*, abaissée du point de suspension *A*, sont les parties d'un même systême, qu'on peut regarder comme un corps suspendu par le cordon *AG*. Ainsi le centre de gravité de ce systême est dans la même ligne verticale *AZ*, avec le cordon *AG*.

19. *On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire que le cordon* A I *soit attaché aux centres mêmes de gravité des corps* K, L, M, &c. *qu'il soûtient, pour que ces centres de*

gravité G, H, I, &c. *se rangent dans une même ligne verticale avec le centre de gravité général du système; mais qu'il suffit que les cordons* AB, CD, EF, &c. *soient attachés à des axes d'équilibre* BC, DE, &c. *des corps qui sont au-dessus du corps* M *le plus bas: cela est trop clair pour mériter une démonstration. Nous verrons dans un des Corollaires suivans, que si les cordons attachés à un même corps qui ne seroit pas le plus bas, n'étoient point attachés à un même axe d'équilibre, c'est-à-dire à deux points d'une ligne droite qui passe par le centre de gravité de ce corps; le point de suspension* A, *& les centres de gravité des corps soûtenus, ne seroient pas dans la même ligne verticale* AZ *avec le cordon* AB.

COROLLAIRE III.

20. Dans le Corollaire précédent, la flexibilité du cordon attaché aux centres de gravité *G, H, I, &c.* des corps *K, L, M, &c.* n'a servi qu'à permettre à ces corps de prendre un arrangement, tel que leurs centres de gravité particuliers, & celui du système général, fussent dans une même ligne verticale *AZ*. Mais lorsque tout est ainsi arrangé, & que le système est immobile; rien n'empêche de regarder le cordon comme une ligne droite inflexible qui passe par tous les centres de gravité des corps *K, L, M, &c.* Et comme on a démontré (*n°.* 18) que le centre de gravité de tout ce système sera dans la même ligne droite; on peut conclurre que si les centres de gravité particuliers de tant de corps qu'on voudra, sont en ligne droite, le centre de gravité général du système de tous ces corps sera dans la même ligne droite. Fig. 5.

Il suit de là que le centre de gravité d'une ligne

droite considérée comme pesante, est un point de cette ligne droite.

Corollaire IV.

Fig. 4. 21. Mais plusieurs corps, par exemple deux corps *K*, *L*, étant liés ensemble par un cordon *CD*; si l'on suspend ce système par un cordon *AB* qui pende librement d'un point fixe *A*, & qui soit attaché au corps *K* par un point *B*, en sorte que la droite *BC*, qui joint les points d'attache *B*, *C*, ne passe pas par le centre de gravité *G* du corps *K*; les centres de gravité *G*, *H* des deux corps *K*, *L*; & le point fixe *A*, ne seront pas dans une même ligne verticale; & les deux corps *K*, *L*, seront disposés de la manière suivante.

Suivant le premier Corollaire, le corps *L* suspendu par le cordon *CD*, se placera de manière que son centre de gravité *H*, le point *D* par lequel le cordon lui est attaché, & le point *C* de suspension que l'on peut regarder comme un point fixe, puisque tout est immobile, seront tous trois avec le cordon *CD* dans une même ligne verticale *CDH*.

D'ailleurs tout étant en repos, rien n'empêche que l'on ne regarde les deux corps *K*, *L*, comme deux parties d'un même corps liées ensemble par une verge roide *CD*, ou *GH*, sans pesanteur. Alors si le point *I* est le centre de gravité du système qui se trouve suspendu par le cordon *AB*, il est prouvé dans le premier Corollaire, que le centre de gravité *I* du système des deux corps *K*, *L*, le point *B* par lequel le cordon *AB* est attaché à ce système, & le point fixe *A* de suspension, sont avec le cordon *AB* dans une même ligne verticale *AI*.

Mais puisque les cordons *AB*, *CD* doivent nécess-

fairement être verticaux, il n'est pas possible que les centres de gravité *G*, *H* des deux corps *K*, *L*, & le point de suspension *A*, soient dans une même ligne verticale *AB*; à moins que les trois droites *AB*, *BC*, *CH* ne fassent ensemble une seule ligne droite qui passe par le point *G*: ce qui est impossible, puisque (*hyp.*) *BC* qui devroit être une partie de cette ligne droite, ne passe pas par ce point G. Donc il est impossible que les centres de gravité *G*, *H* des deux corps *K*, *L*; & le point de suspension *A*, soient dans une même ligne verticale, dans le cas où la droite *BC* qui joindra les points d'attaches des cordons, ne sera pas un axe d'équilibre du corps *K*.

Corollaire V.

22. Si l'on suspend successivement un corps pesant par deux points différens au moyen d'un fil; les deux directions du fil, quoiqu'elles se réduisent à la même en effet, seront différentes par rapport au corps suspendu successivement par deux points différens, & se croiseront au centre de gravité de ce corps; car (n°. 15) chaque *direction* verticale du fil *passera* par le centre de gravité du corps suspendu.

Corollaire VI.

23. Si l'on suspend une droite pesante *MN*, par le moyen de deux fils *AB*, *CD* attachés à deux points différens de cette droite; ces deux fils seront dans un même plan vertical avec la droite *MN*. Fig. 5.

La droite *MN* étant pesante, tous ses points tendent à descendre verticalement; en sorte que cette ligne tend à descendre suivant un plan vertical. Donc les deux fils *AB*, *CD*, qui pour soûtenir cette ligne

doivent résister dans un sens opposé à celui de la pesanteur, agiront aussi dans un plan vertical, & seront par conséquent tous deux dans un même plan vertical, avec la droite *MN* qu'ils soûtiennent.

Il en sera de même si, au lieu d'une droite pesante, on suspend un axe d'équilibre chargé de la gravité ou du centre de gravité d'un corps ou d'une surface quelconque.

Corollaire VII.

Fig. 6. 24. Lorsqu'une droite pesante, ou un axe d'équilibre *MN* chargé du centre de gravité G de son corps, est suspendu par le moyen de deux cordons *AB*. *CD* sans pesanteur, attachés à une verge inflexible *AC*, aussi sans pesanteur, & que cette verge est soûtenue par un cordon *EF* attaché à un point fixe *E*; le point fixe *E* d'où pend le fil, le point *F* par lequel la verge inflexible *AC* est soûtenue, & le centre de gravité G du corps dont *MN* est un axe d'équilibre, sont tous trois avec le fil *EF* dans une même verticale *EFGZ*; & les fils *AB*. *CD*. *EF* sont tous trois dans un même plan vertical.

Le systême étant immobile; on peut considérer l'axe d'équilibre *MN*, la ligne inflexible *AC*, & les cordons *AB*. *CD*, comme un même corps qui n'a de pesant que le centre de gravité G, & qui est soûtenu par le cordon *EF*. Ainsi (n°. 15 & 16) le point fixe *E* d'où pend le fil, le point *F* par lequel le fil tient au systême *ABDC*, & le centre de gravité G, seront tous trois avec le cordon *EF* dans une même ligne verticale *EFGZ*; & seront par conséquent aussi dans un plan vertical qui passera par *EZ*, & par l'axe d'équilibre *MN*.

Nous avons vû (*n°.* 23) que les deux fils *AB*, *CD* qui soûtiennent l'axe d'équilibre *MN*, sont dans un même plan avec *MN*; & l'on vient de faire voir que *EF* est aussi dans ce plan. Donc les trois cordons *AB*, *CD*, *EF* sont dans un même plan vertical.

AVERTISSEMENT.

25. Pour trouver le centre de gravité d'un corps ou d'une figure quelconque, on est obligé de considérer les centres de gravité de ses élémens; & l'on cherche ensuite le centre de gravité commun à ceux de ces élémens. Comme on peut se représenter dans une même figure différentes sortes d'élémens, il est à propos de donner ici une idée des différentes façons dont on conçoit qu'une figure peut être composée.

On peut imaginer qu'un solide est composé d'une infinité de lames plates. On suppose ordinairement ces lames également épaisses, afin que le poids de chaque lame soit proportionnel à son aire: mais rien n'oblige à les supposer telles; & si l'on trouve plus commode de les prendre d'inégale épaisseur, on peut le faire sans scrupule, pourvû que l'on fasse leurs poids proportionnels aux produits de leurs aires & de leurs épaisseurs.

On peut encore imaginer qu'un solide est composé d'une infinité de couches semblables à la figure extérieure, & supposer à ces couches des épaisseurs égales, pour que leurs poids soient proportionnels à leurs aires, ou donner à ces couches des épaisseurs inégales, en faisant leurs poids proportionnels aux produits de leurs aires & de leurs épaisseurs.

Enfin l'on peut supposer qu'un corps est composé d'une infinité de petites pyramides, dont tous les sommets sont réunis à un même point de ce corps, &

dont toutes les bases forment la surface de ce même corps.

La sphère fournit un exemple de ces trois manières dont on peut considérer la composition d'un corps. 1°. On peut supposer que la sphère est composée d'une infinité de lames plates circulaires posées les unes sur les autres. 2°. On peut supposer qu'elle est composée d'une infinité de couches sphériques. 3°. On peut imaginer qu'elle est composée d'une infinité de pyramides égales, dont tous les sommets sont au centre, & dont les bases forment ou occupent la surface entière sphérique.

On peut de même considérer que le cylindre est composé d'une infinité de lames circulaires, égales au plan ou à la lame qui lui sert de base. On peut imaginer aussi qu'il est composé d'une infinité de couches cylindriques; mais il ne seroit pas également commode de le supposer composé d'une infinité de pyramides.

En considérant une superficie, on la regarde comme un corps infiniment mince qui a par-tout la même épaisseur. Si cette superficie est un plan, on peut imaginer qu'elle est composée d'une infinité de verges droites, chacune d'une largeur uniforme, & toutes également épaisses, afin que leurs poids soient proportionnels à leurs longueurs. On peut imaginer aussi que le plan, par exemple un cercle, est composé d'une infinité de couronnes placées les unes dans les autres; enfin l'on peut supposer que le même cercle est composé d'une infinité de triangles qui ont tous leurs sommets au centre, & dont les bases occupent la circonférence.

Si la superficie est courbe, telle que la superficie d'une

d'une sphère; on peut ſuppoſer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de zones, dont chacune eſt d'une largeur uniforme; & les largeurs de ces zones peuvent être priſes égales ou inégales, comme on le trouvera plus commode.

La ligne eſt conſidérée comme un corps de groſſeur uniforme, infiniment peu large & infiniment peu épais. On peut imaginer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de points égaux, ſi l'on veut que ces points pèſent également; ou qu'elle eſt compoſée d'une infinité de petites parties de différentes longueurs, s'il n'eſt pas néceſſaire de faire uſage de parties également peſantes.

Les lignes conſidérées comme élémens, étant de groſſeur uniforme, ſont, comme nous venons de le dire, partagées en points égaux qui pèſent également. Mais les lignes élémentaires ne ſont pas les ſeules que l'on conſidère : il y en a d'autres qui ſouvent ne ſont pas regardées elles-mêmes comme peſantes,& qui ſont chargées des poids de tous les élémens d'une figure. Les parties égales de ces ſortes de lignes ne ſont pas ordinairement également chargées; ainſi quand on eſt dans le cas de les conſidérer comme peſantes, il faut ſuppoſer les poids de leurs parties, proportionnels aux grandeurs des élémens dont elles ſont chargées.



CHAPITRE II.

Des centres de Gravité des figures symmétriques, & de quelques autres figures.

PREMIERE PROPOSITION FONDAMENTALE.

THÉOREME.

Fig. 7. 26. *LE centre de gravité du système de deux corps* K, L *également pesans, est dans le milieu* C *de la droite* A B *qui joint les centres de gravité particuliers de ces deux corps.*

DÉMONSTRATION.

La proposition sera démontrée, si l'on fait voir qu'en suspendant le système par le milieu de la droite *A B*, il demeurera immobile dans toutes les situations qu'on lui donnera, c'est-à-dire dans la situation horizontale, ou dans une situation inclinée quelconque à l'horizon.

Si la droite *A B* est horizontale, & soûtenue par son milieu *C* au moyen d'un fil *C D*, toutes choses seront égales & semblables de part & d'autre du fil destiné à soûtenir le système. Ainsi il n'y aura aucune raison pour que l'un des deux corps l'emporte sur l'autre, ou descende préférablement à l'autre; & par conséquent les deux corps *K*, *L*, soûtenus par le milieu *C* de la droite horizontale *A B*, resteront immobiles.

Fig. 8. Si la droite *A B*, suspendue par son milieu *C* au moyen du fil *C D*, est inclinée à l'horizon de quelque façon que ce soit; on imaginera dans son plan vertical, & par son milieu *C*, une droite horizontale *E C F*, que les directions verticales *E A*, *B F* de la pesanteur

des deux corps *K*, *L* rencontreront en deux points *E*, *F* qui seront également éloignés du point *C*, parce que *C A* = *C B*. Alors concevant la droite *E C F* solidement arrêtée avec la droite *A B*, on pourra regarder le corps *K*, comme s'il étoit appliqué par un cordon *E A* au bout *E* de la droite *E F*; & considérer le corps *L*, comme s'il poussoit par une verge *B F* l'autre bout *F* de la même droite : en sorte que les deux corps également pesans *K*, *L* seront censés agir de tout leur poids sur les extrémités d'une droite horizontale *E F* soûtenue par son milieu *C*. Donc suivant le premier cas, les deux corps *K*, *L* ainsi soûtenus doivent demeurer immobiles, quoique réellement appliqués aux extrémités d'une droite *A B* inclinée à l'horizon d'une façon quelconque.

Donc en général les corps *K*, *L* seront soûtenus immobiles par un point pris au milieu de la droite *A B* qui joint leurs centres de gravité, dans quelque situation que puisse être cette droite *A B*. Ainsi le centre de gravité du système de deux corps également pesans, est au milieu de la droite qui joint leurs centres de gravité particuliers. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

27. Deux corps égaux *K*, *L* ayant leurs centres de gravité *A*, *B* aux extrémités d'une droite *A B* dont le milieu est *C*; si à distances égales de ce milieu *C*, on applique encore à la même droite les centres de gravité *D*, *E* de deux nouveaux corps égaux *M*, *N*, ce milieu *C* sera encore le centre de gravité de ces deux nouveaux corps *M*, *N*: & comme il étoit déja le centre de gravité des deux premiers *K*, *L*, il sera le centre de gravité des quatre corps *K*, *L*, *M*, *N*. Fig. 9.

Si l'on continue d'appliquer les centres de gravité de deux nouveaux corps égaux, à la même droite *A B* & à distances égales de son milieu *C*; il est clair que ce milieu *C* sera toûjours le centre de gravité de ces nouveaux corps, & celui du systême de tous les corps appliqués à la droite *A B*.

COROLLAIRE. II.

28. Donc toute figure dont les élémens auront leurs centres de gravité dans une même ligne droite, aura son centre de gravité dans le milieu de cette ligne droite, si ces élémens pris deux à deux à distances égales du milieu de cette droite, sont égaux; puisque suivant ce qui est supposé, ces élémens pris deux à deux sont de petits corps égaux ou également pesans, que l'on peut regarder comme les corps *K, L, M, N* dont on a parlé dans le Corollaire précédent.

THÉOREME.

Fig. 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, & 19.

29. *La ligne droite, le parallélogramme, le cercle, l'ellipse, & toutes les figures planes symmétriques fermées, le parallélépipède, le cylindre, la sphère, l'ellipsoïde, & tous les solides de révolution engendrés par des moitiés de figures symmétriques fermées, ont leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures; sçavoir:*

La ligne droite, dans le milieu de sa longueur.

Le parallélogramme, le cercle, l'ellipse, & toutes les figures planes symmétriques fermées, dans le milieu de la ligne droite qui les coupe en deux parties égales.

Le parallélépipède & le cylindre, dans le milieu de la ligne droite tirée par les milieux ou centres des bases opposées.

La sphère & l'ellipsoïde, dans le milieu du diamètre ou de l'axe, c'est-à-dire dans le centre.

DÉMONSTRATION.

Toutes ces figures sont composées d'élémens qui ont leurs centres de gravité dans la même ligne droite qui passe par le milieu de ces figures ; & ces élémens pris deux à deux à distances égales du centre de la figure, sont égaux. Ainsi chacune de ces figures a son centre de gravité dans son milieu (*n°*. 28.).

Pour rendre cette démonstration sensible, on va parcourir la plûpart des figures énoncées dans le Théorème.

Pour la ligne droite.

Tous les points d'une ligne droite *AB* étant égaux, en les prenant deux à deux à distances égales de son milieu *C*, ils seront nécessairement également pesans. Ainsi le centre de gravité d'une ligne droite est dans son milieu *C*. I

Pour le parallélogramme, le cercle, l'ellipse, & les figures planes symmétriques fermées, telles qu'un polygone régulier dont le nombre des côtés est pair. Fig. 11, 12, 13, 14, & 15.

Toutes ces figures sont composées de lignes droites parallèles, dont chacune a son centre de gravité dans son milieu.

Une ligne droite *AB* qui divise deux de ces élémens en deux parties égales, coupe aussi tous les autres en deux parties égales. Ainsi ces élémens ont leurs milieux ou centres de gravité dans la même droite *AB*; & par conséquent la droite *AB* divise ces figures en deux également.

Ces élémens pris deux à deux à distances égales du

milieu *C* de la droite *AB*, sont égaux. Donc chacune de ces figures a son centre de gravité dans le milieu de la droite *AB* qui la divise en deux parties égales.

Toute autre ligne droite qui divisera ces figures en deux parties égales, passera par le même point *C* milieu de la droite *AB*, & sera coupée en deux également à ce point *C*. Donc le centre de gravité de chacune des figures énoncées, est au milieu de toute ligne droite qui la divise en deux parties égales.

Ce point du milieu C, *qui est le centre dans le cercle & dans l'ellipse, se nomme aussi* centre *dans le parallélogramme.*

Fig. 16, 17, 18, & 19.

Pour le parallélépipède, le cylindre, la sphère & l'ellipsoïde.

Le parallélépipède est composé de lames parallélogrammiques égales, dont les centres de gravité sont les milieux.

Le cylindre est composé de lames circulaires égales, dont les milieux ou centres sont les centres de gravité.

La sphère, & le sphéroïde elliptique ou l'ellipsoïde, sont composés de lames circulaires dont les centres ou milieux sont les centres de gravité.

Mais les milieux des élémens de chacune de ces figures sont dans une même ligne droite *AB*, tirée par les milieux ou centres de deux lames ou élémens quelconques; & cette droite *AB* passe par le centre de la figure dans la sphère & dans l'ellipsoïde.

Les élémens de chacune de ces figures, étant pris deux à deux à distances égales du milieu *C* de la droite *AB* qui les enfile tous par le milieu, sont aussi égaux, & par conséquent également pesans.

Donc chacune de ces figures a son centre de gravité

dans le milieu de la droite *AB* qui passe par les centres de deux élémens quelconques. Dans le parallélépipède, de même que dans le cylindre, cette droite *AB* passe par les milieux ou centres des deux bases opposées; & dans la sphère ou dans l'ellipsoïde, cette droite *AB* passe par le centre de la figure.

Il en sera de même des autres plans ou solides qui pourront être partagés en deux parties égales & semblables par une même ligne droite, ou par un même plan, lorsque les centres de gravité de tous les élémens seront dans une même ligne droite; puisque tous les élémens de ces figures, pris deux à deux à distances égales du milieu de la droite qui les traversera par leurs centres de gravité, seront égaux.

THÉOREME.

30. *Le centre de gravité du contour d'un parallélogramme, & du circuit d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est pair, est au milieu* C *de la droite* A B *qui divise deux côtés opposés* M N, m n, *en deux parties égales.* Fig. 11 & 14.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées ou imaginées des lignes droites par les milieux ou centres de gravité de tous les côtés opposés: toutes ces droites se couperont en deux parties égales au même point *C*.

Or (*n*°. 27) les côtés opposés étant égaux, & par conséquent également pesans, le centre de gravité de deux côtés opposés quelconques, tels que *MN*, *mn*, sera dans le milieu *C* de la droite qu'on a tirée par les centres de gravité ou milieux de ces côtés.

Donc toutes les paires de côtés opposés auront leur centre de gravité commun au même point *C*; &

par conséquent le contour de toute la figure aura son centre de gravité à ce point *C* pris au milieu d'une droite *AB* tirée par les milieux de deux côtés opposés quelconques *MN*, *mn*.

On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire qu'un polygone dont le nombre des côtés est pair, soit régulier, pour que le centre de gravité soit dans le milieu C *de la droite* AB *qui joint les milieux* A, B *de deux côtés opposés quelconques* MN, mn; *& qu'il suffit que les côtés opposés soient égaux deux à deux; que les droites qui joignent les milieux des côtés opposés, passent toutes par un même point* C, *& soient divisées chacune en deux parties égales à ce même point* C. *La démonstration est la même pour cette espèce de polygone, que pour le polygone régulier dont le nombre des côtés est pair.*

COROLLAIRE.

31. Donc le centre de gravité de la circonférence d'un cercle ou d'une ellipse, est à son centre, c'est-à-dire au milieu d'un de ses diamètres quelconques. Car le cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'un nombre pair infini de côtés, & l'ellipse comme un polygone d'un nombre pair infini de côtés dont les opposés sont égaux deux à deux, & dans lesquels les droites qui joignent les milieux de ces côtés se coupent toutes en deux parties égales au centre de l'ellipse, & par conséquent au milieu d'un diamètre quelconque.

THÉOREME.

Fig. 16, 17, 18, 19. 32. *Les superficies des parallélépipèdes & des cylindres, en y comprenant ou n'y comprenant pas les deux bases opposées, & celles de la sphère & de l'ellipsoïde, ont*

leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la droite *AB*, en sorte que dans le parallélépipède & dans le cylindre, elle passe par les milieux ou centres de gravité *A*, *B* des bases opposées *MN*, *mn*; qu'elle soit un diamètre dans la sphère, & que dans le sphéroïde elliptique elle soit l'axe de révolution : comme les deux bases opposées *MN*, *mn* du parallélépipède ou du cylindre sont égales, le milieu *C* de la droite *AB* sera le centre de gravité du système de ces deux bases.

Imaginons que les superficies des figures dont il est question, sont divisées en zones par une infinité de plans parallèles également éloignés les uns des autres; que dans le parallélépipède & le cylindre, ces plans sont parallèles aux bases opposées *MN*, *mn*; & qu'ils sont perpendiculaires à l'axe *AB*, dans la sphère & dans l'ellipsoïde. Ces zones infiniment étroites dont les bases seront parallélogrammiques dans le parallélépipède, & circulaires dans les trois autres figures, auront leurs milieux ou centres de gravité dans la droite *AB*; de plus ces zones prises deux à deux à distances égales du milieu *C* de la droite *AB*, seront égales. Donc le centre de gravité du système composé de toutes ces zones, sera dans le milieu *C* de la droite *AB*.

Or toutes ces zones composent la superficie du parallélépipède ou celle du cylindre, sans y comprendre les deux bases opposées *MN*, *mn*, ou composent la superficie entière de la sphère ou du sphéroïde elliptique.

Donc les superficies des parallélépipèdes & des cylindres, sans y comprendre les deux bases opposées *MN*, *mn*, & celles de la sphère & de l'ellipsoïde, ont chacune

leur centre de gravité au milieu de la droite *AB*, qui est aussi le milieu de leur figure.

Nous avons vû que le même point *C* étoit le centre de gravité des deux bases opposées *MN*, *mn*, dans le parallélépipède & dans le cylindre. Ainsi les centres de gravité des superficies des parallélépipèdes & des cylindres, en y comprenant les deux bases opposées *MN*, *mn*, sont encore dans les milieux de ces deux figures.

On doit remarquer que chaque solide de révolution autour d'un axe, aura aussi le centre de gravité de sa solidité & de sa superficie au milieu de cet axe, lorsque ses élémens pris deux à deux à distances égales du milieu de l'axe seront égaux. En voici un exemple dans le Théorème suivant.

THÉOREME.

Fig. 20. 33. *Le centre de gravité* P *de la surface convexe d'un segment de sphère, est au milieu de la flèche* AN *de ce segment; & le centre de gravité d'une zone* DGLH *de sphère, comprise entre des plans parallèles, est au milieu* Q *de la droite* NM *qui joint les centres* N, M *de ses bases opposées.*

DÉMONSTRATION.

Imaginons la surface de la sphère divisée en une infinité de zones telles que *DEHI*, *EFIK*, *FGKL*, &c. par des plans qui coupent en parties égales le diamètre *AB*. Il est démontré en Géométrie, que toutes ces zones seront égales; & comme elles auront toutes leur centres particuliers de gravité dans le même diamètre *AB*, où sont leurs centres, il est clair que toutes les zones qui composeront la surface du segment *ADH*, & qui auront toutes leurs centres particuliers dans la

flèche *AN*, chargeront uniformément cette flèche. Ainsi la flèche *AN* chargée des poids égaux de ces zones élémentaires, aura son centre de gravité dans son milieu P.

Il en sera de même de la zone *DGHL* composée de zones élémentaires dont chacune aura son centre de gravité dans *NM*. Car ces petites zones égales répondant à des parties égales de *NM*, chargeront uniformément cette droite *NM*. Ainsi le centre de gravité de la droite *NM* chargée de la zone *DGHL*, sera au milieu Q de sa longueur.

THÉOREME.

34. *Le centre de gravité d'un triangle* ABC, *est le point d'intersection* P *de deux lignes* AD, BE *menées de deux angles* A, B *aux milieux de leurs côtés opposés* BC, AC. Fig. 11.

DÉMONSTRATION.

Imaginant le triangle *ABC* composé d'élémens parallèles à *BC*; la droite *AD*, qui coupe le côté *BC* en deux parties égales, coupera pareillement en deux parties égales tous les élémens parallèles à *BC*. Ainsi les centres de gravité de tous ces élémens seront dans la droite *AD*. Donc (*n*°. 20) le centre de gravité du systême de tous ces élémens, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle *ABC*, sera dans la droite *AD* tirée du sommet d'un angle au milieu de son côté opposé *BC*.

Par la même raison, le centre de gravité du même triangle *ABC* sera dans la droite *BE* tirée du sommet de l'angle *B* au milieu de son côté opposé *AC*.

Donc le centre de gravité du triangle *ABC* est en

même temps dans les deux lignes *A D*, *B E*; & par conséquent il est dans le point d'interfection *P* de ces deux lignes tirées de deux angles *A*, *B* aux milieux de leurs côtés opposés *B C*, *A C*.

COROLLAIRE. I.

Fig. 21. 35. Ayant tiré une droite *A D*, d'un angle *A* du triangle *A B C* au milieu *D* du côté *B C* opposé à cet angle; si l'on fait $DP = \frac{1}{3} AD$, ou $AP = \frac{2}{3} AD$, le point *P* sera encore le centre de gravité du triangle *A B C*. Pour le démontrer, on va faire voir que si d'un autre angle *B* on mène une seconde droite *B E* au milieu *E* de son côté opposé, l'interfection *P* des deux droites *A D*, *B E* sera telle qu'on aura $DP = \frac{1}{3} AD$.

Par les milieux *D*, *E* des côtés *B C*, *A C*, soit tirée la droite *D E*; elle sera nécessairement parallèle à *A B*. Ainsi les triangles *D C E*, *B C A* seront semblables; de même que les triangles *D P E*, *A P B*.

Les triangles semblables *D C E*, *B C A* donneront $CE : CA :: DE : BA$; & les triangles semblables *D P E*, *A P B* donneront $DE : AB :: DP : AP$.

Donc $CE : CA :: DP : AP$. Mais *C E* n'est que moitié de *C A*. Donc *D P* sera pareillement moitié de *AP*; & par conséquent *D P* sera le tiers de la ligne totale *A D*.

COROLLAIRE II.

Fig. 22. 36. Donc si l'on fait $BF = \frac{1}{3} AB$, $CG = \frac{1}{3} AC$, & que l'on mène la droite *F G*, qui sera nécessairement parallèle à *B C*; le centre de gravité du triangle sera dans le milieu *P* de cette droite *F G*.

En tirant par le sommet *A* & par ce milieu *P* la droite *A P* jusqu'au côté *B C*, cette droite divisera *B C*

proportionnellement à sa parallèle FG, & le coupera par conséquent en deux parties égales. Ainsi le centre de gravité du triangle ABC doit être au tiers de la droite DA, en prenant ce tiers à commencer du point D.

Mais DP est le tiers de DA, parce que (*construction*) $BF = \frac{1}{3} AB$. Donc le centre de gravité du triangle ABC est au milieu P de FG.

COROLLAIRE III.

37. Si l'on fait attention que les élémens GH, IK, &c. du triangle ABC, sont proportionnels aux parties AO, AQ, &c. de la droite AD qui les partage tous en deux parties égales; on pourra conclurre que toute figure dont les élémens auront leurs centres de gravité dans une même ligne droite, & seront proportionnels aux parties de cette ligne droite comprise entr'eux & le commencement A des élémens, aura son centre de gravité P aux deux tiers de cette ligne droite, à commencer du point A où le premier élément est nul ou infiniment petit. Fig. 21.

Ce Corollaire aura son application, pour trouver le centre de gravité d'un paraboloïde.

PROBLEME.

38. *Trouver le centre de gravité de l'aire & du contour d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est impair.*

SOLUTION.

Soit $ABCDE$ le polygone régulier proposé. Si l'on divise deux quelconques de ses côtés, par exemple AB, BC en deux parties égales, & que par leurs milieux F, G, l'on mène des droites FD, GE aux sommets des angles opposés; le point P, où se cou- Fig. 23.

peront ces deux droites, sera le centre de gravité de l'aire & du contour du polygone proposé.

En imaginant le polygone composé d'élémens parallèles à *AB*, on verra aisément que chacun de ces élémens aura son milieu ou son centre de gravité dans la droite *FD*; & l'on conclurra que le système de tous ces élémens, ou le polygone lui-même, a le centre de gravité de son aire dans la droite *FD*.

Le contour du polygone a un côté *BA* dont le milieu ou centre de gravité *F* est dans la droite *FD*. Les autres côtés de ce contour sont disposés symmétriquement deux à deux de part & d'autre de la droite *FD*, en sorte que les droites *GH*, *IK*, &c. qui joignent les milieux ou centres de gravité des côtés symmétriques correspondans, sont toutes coupées en deux également par *FD*. Ainsi (nº. 26) le centre de gravité de chaque paire de côtés, tels que *BC*, *AE*, ou *CD*; *ED*, est dans la droite *FD*; d'où il suit que le contour du polygone, qui est le système de tous ses côtés, a aussi son centre de gravité dans la droite *FD*.

Par la même raison, l'aire du polygone proposé & son contour ont leurs centres de gravité dans la droite *GE* tirée de l'angle *E* par le milieu de *BC*.

Donc le point *P*, où se coupent les deux droites *FD*, *GE*, est en même-temps le centre de gravité de l'aire du polygone proposé, & celui du contour du même polygone qu'on suppose régulier & dont le nombre des côtés est impair.

Corollaire. I.

Fig. 23. 39. Le cercle pouvant être regardé comme un polygone d'un nombre infini impair de côtés infiniment petits, on peut conclurre une seconde fois que le

centre de gravité de l'aire d'un cercle, & celui de sa circonférence, est au milieu de son diamètre.

COROLLAIRE II.

40. Donc le centre de gravité de l'aire & celui du contour d'un polygone régulier, est au centre d'un cercle inscrit ou circonscrit à ce polygone; car les deux droites *FD*, *GE* se couperont au centre commun de ces cercles. Fig. 23.

PROBLEME.

41. *Trouver le centre de gravité* P *d'un plan rectiligne quadrilatère* A B C D. Fig. 24.

SOLUTION.

On partagera par une diagonale *B D* le quadrilatère donné, en deux triangles *A B D*, *C B D*; & après avoir déterminé les centres de gravité *E*, *F* de ces deux triangles, on mènera la droite *E F* qui contiendra nécessairement le centre de gravité du quadrilatère; parce que les points E, F étant les centres de gravité des deux triangles *A B D*, *CBD*, le centre de gravité du système de ces deux triangles sera (*n*° 20) dans la ligne droite qui joint leurs centres de gravité particuliers.

On mènera ensuite une seconde diagonale *A C*, pour partager le quadrilatère en deux autres triangles *ABC*, *ADC*: & après avoir déterminé les centres de gravité *G*, *H* de ces deux nouveaux triangles, on mènera la droite G *H* dans laquelle se trouvera encore, par la même raison, le centre de gravité du système composé de ces deux triangles, c'est-à-dire du quadrilatère proposé.

Le centre de gravité du quadrilatère *ABCD*, étant en même temps dans les deux droites *EF*, *GH*, sera donc nécessairement dans l'interfection *P* de ces deux droites.

REMARQUES.

Fig. 24. 42. L'opération que l'on vient d'expliquer, pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère rectiligne, peut être abrégée, en faisant attention que pour trouver les centres de gravité *E*, *F* des deux triangles *ABD*, *CBD*, il a fallu diviser la diagonale *BD* en deux parties égales en *I*, tirer les deux droites *AI*, *CI*, faire $IE = \frac{1}{3} AI$, & $IF = \frac{1}{3} CI$; ce qui rend la droite *EF* parallèle à l'autre diagonale *AC*, & $IL = \frac{1}{3} IN$. Par conséquent pour trouver la première ligne droite *EF*, dans laquelle est le centre de gravité du quadrilatère, il étoit suffisant (après avoir tiré les deux diagonales *BD*, *AC*,) de prendre le milieu *I* de la première diagonale *BD*, & de faire $IL = \frac{1}{3} IN$. Car en tirant par le point *L* une droite indéfinie *EF* parallèle à la seconde diagonale *AC*, le centre de gravité *P* demandé se seroit trouvé dans cette droite *EF*.

Par la même raison, pour trouver la seconde droite *GH*, où est aussi le centre de gravité du quadrilatère, il falloit seulement prendre le milieu *K* de la seconde diagonale *AC*, faire $KM = \frac{1}{3} KN$, & par le point *M* mener *GH* parallèle à la première diagonale *BD*.

Fig. 25. 43. Si le quadrilatère *ABCD* avoit eu deux côtés *AB*, *CD* parallèles, on auroit pû prendre les milieux *G*, *H* de ces côtés parallèles, & tirer les trois droites *GH*, *CG*, *HB*. Faisant ensuite $GE = \frac{1}{3} GC$, & $HF = \frac{1}{3} HB$, la ligne *EF* rencontrant *GH* en

P, auroit déterminé ce point P pour le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$.

Pour le prouver, imaginons le quadrilatère partagé par une diagonale BC en deux triangles ACB, CBD. Il est clair que le point E, déterminé dans la droite GC qui passe par le milieu de AB, est le centre de gravité du triangle ACB; & que le point F, déterminé dans la droite HB qui passe par le milieu de CD, est le centre de gravité du triangle CBD. Ainsi la droite EF, qui passe par ces deux centres de gravité, doit contenir le centre de gravité du quadrilatère entier.

Imaginons encore le quadrilatère composé d'élémens parallèles aux deux côtés AB, CD qui sont déjà parallèles. La droite GH, qui passe par les milieux G, H des côtés AB, CD, divisera tous ces élémens en deux parties égales, & passera par conséquent par tous leurs centres de gravité : ainsi le centre de gravité du système de tous ces élémens, c'est-à-dire, du quadrilatère $ABCD$, sera encore dans la droite GH.

Donc le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$ est au point P commun aux deux droites EF, GH.

PROBLEME.

44. *Trouver le centre de gravité d'un pentagone ou d'un exagone rectiligne quelconque.* Fig. 14 & 17.

SOLUTION.

On divisera ce polygone par une diagonale AD en deux parties, dont l'une soit un quadrilatère $ABCD$; l'autre partie sera un triangle ADE, ou un second quadrilatère $ADEF$, suivant que le polygone proposé sera un pentagone ou un exagone. Puis on cherchera, comme il a été dit (*nos*. 35 & 42), les centres de

gravité particuliers *L*, *H* de ces deux parties séparément prises, & l'on mènera la droite *HL* dans laquelle se trouvera nécessairement le centre de gravité du polygone proposé.

On divisera encore une fois le même polygone par une nouvelle diagonale *B E* en deux autres parties, dont l'une *B C D E* sera un quadrilatère, & l'autre un triangle *B E A*, ou un quadrilatère *B E F A*, suivant que le polygone sera un pentagone ou un exagone. Puis on cherchera de nouveau les centres de gravité *K*, *I* de ces deux parties en particulier, & l'on mènera la droite *I K* qui contiendra aussi le centre de gravité du polygone proposé.

Comme le centre de gravité du polygone sera en même temps dans les deux droites *H L*, *I K*, il sera nécessairement au point d'intersection *P* de ces deux droites.

On trouvera de la même manière les centres de gravité de tous les plans rectilignes, en divisant deux fois ces polygones en deux autres polygones dont on saura trouver les centres de gravité; parce que quand on sait trouver le centre de gravité d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un pentagone & d'un exagone, on peut trouver les centres de gravité des figures composées de deux de ces polygones, savoir, de l'eptagone, de l'octogone, de l'ennéagone, & du décagone: & l'on pourra, par la même méthode, trouver les centres de gravité des figures rectilignes composées de deux des précédentes; & ainsi de suite. Mais il faut avouer que cette pratique est très-longue & trop ennuyeuse.

45. *Comme un prisme quelconque est composé de lames égales & semblables à celles de ses bases opposées, & que la droite qui passe par les centres de gravité des deux bases,*

passe aussi par les centres de gravité de toutes les lames élémentaires parallèles à ces bases; le centre de gravité du prisme se trouvera au milieu de cette ligne droite. Ainsi puisque nous avons un moyen de trouver les centres de gravité de tous les plans rectilignes qui peuvent servir de bases à des prismes, nous pouvons aussi déterminer les centres de gravité de tous les prismes dont les bases sont des plans rectilignes.

THÉOREME.

46. *Le centre de gravité d'une pyramide* ZABCDE *est dans la droite* ZF *tirée de son sommet* Z *au centre de gravité* F *de sa base.* Fig. 18.

DÉMONSTRATION.

Imaginons que la pyramide est composée d'une infinité de lames parallèles à sa base *ABCDE*. On a vû (*Géom. nº.* 442.) que toutes ces lames seront semblables à la base, & que la droite *Z F*, menée du sommet à un point quelconque *F* de la base, passera par tous les points semblablement placés dans les lames parallèles; en sorte que si le point *F* est le centre de gravité de la base *A B C D E*, tous les points où les lames parallèles seront rencontrées par la droite *Z F*, seront les centres de gravité de ces lames. Donc le centre de gravité du système de toutes ces lames, ou de la pyramide *Z A B C D E*, sera dans la droite *Z F* tirée du sommet *Z* de la pyramide au centre de gravité F de sa base.

COROLLAIRE I.

47. Si du milieu *D* d'un côté *B C* commun à deux faces *A B C*, *S B C* d'une pyramide triangulaire Fig. 19.

SABC, l'on tire dans ces faces les droites *DA*, *DS* aux sommets des angles opposés; & qu'après avoir pris sur ces lignes des parties $DE = \frac{DA}{3}$, $DF = \frac{DS}{3}$, on mène par les points *E*, *F* les deux droites *ES*, *FA* aux sommets opposés de la pyramide; ces deux droites qui se trouveront dans un même plan *SAD*, se couperont dans un point *P* qui sera le centre de gravité de la pyramide triangulaire *SABC*.

Car le point *D* étant le milieu de *BC*, & *DE*, *DF* étant les tiers des deux droites *DA*, *DS*, on a vû (*n°*. 35.) que les points *E*, *F* sont les centres de gravité des deux faces triangulaires *ABC*, *SBC*.

Mais les triangles *ABC*, *SBC* étant considérés successivement comme bases de la pyramide, on a prouvé (*n°*. 46.) que le centre de gravité de cette pyramide sera dans la ligne *SE* & dans la ligne *AF*. Ainsi le point *P*, où les deux droites *SE*, *AF* se couperont, sera le centre de gravité de la pyramide triangulaire *SABC*.

COROLLAIRE II.

Fig. 29. 48. Donc le centre de gravité *P* de la pyramide triangulaire *SABC*, est tellement situé dans *SE*, que $EP = \frac{SE}{4}$.

Pour le démontrer, soit tirée la droite *FE*. Comme on a fait $DE = \frac{AD}{3}$ & $DF = \frac{SD}{3}$, les côtés *AD*, *SD* du triangle *ASD* seront coupés proportionnellement; ainsi *EF*, *AS* seront parallèles, & les deux triangles *EDF*, *EPF* seront semblables aux deux triangles *ADS*, *SPA*.

Or les triangles semblables *EDF*, *ADS* donneront

DE : *DA* :: *EF* : *AS*; & les triangles semblables *EPF*, *SPA* donneront *EF* : *SA* :: *EP* : *SP*. On aura donc *DE* : *DA* :: *EP* : *SP*. Mais (*conſt.*) $DE = \frac{DA}{3}$. Ainſi $EP = \frac{SP}{3}$; & par conſéquent *EP* eſt le quart de la ligne entière *SE*.

COROLLAIRE III.

49. Si du ſommet *Z* d'une pyramide quelconque *ZABCDE*, l'on mène une droite *ZF* au centre de gravité *F* de ſa baſe *ABCDE*, & qu'on prenne ſur cette ligne une portion *FP* égale au quart de la ligne entière *ZF*; le point P ſera le centre de gravité de cette pyramide. Fig. 28.

Pour le prouver, conſidérons que la pyramide *ZABCDE* eſt partagée en autant de pyramides triangulaires *ZABE*, *ZEBD*, *ZDBC*, qu'il y a de triangles *ABE*, *EBD*, *DBC* dans ſa baſe. Des centres de gravité *G*, *H*, *I* de ces triangles, concevons des droites *GZ*, *HZ*, *IZ* tirées au ſommet *Z* commun à la pyramide entière & aux pyramides particulières qui la compoſent. Puis ayant fait $FP = \frac{FZ}{4}$, imaginons qu'on a mené par le point *P*, parallèlement à la baſe *ABCDE*, un plan *MNO* qui rencontre en *M*, *N*, *O* les droites *GZ*, *HZ*, *IZ*, & qui (*Géom.* n°. 441.) les coupe proportionnellement, en ſorte que $GM = \frac{GZ}{4}$, $HN = \frac{HZ}{4}$, $IO = \frac{IZ}{4}$. Il eſt clair (n°. 48.) que les points *M*, *N*, *O* ſeront les centres de gravité particuliers des pyramides triangulaires *ZABE*, *ZEBD*, *ZDBC*.

Les centres de gravité particuliers *M*, *N*, *O* des pyramides *ZABE*, *ZEBD*, *ZDBC* étant dans le

plan *MNO*; le centre de gravité du système de ces pyramides, ou de la pyramide entière *ZABCDE*, sera dans le même plan *MNO*. Mais (*n°.* 46.) le centre de gravité de cette pyramide *ZABCDE* est aussi dans la droite *ZF*. Donc le centre de gravité de la pyramide *ZABCDE* est au point *P* qu'on a pris au quart de la ligne *ZF*, & par lequel on a mené le plan *MNO*.

Corollaire IV.

Fig. 30. 50. Donc si l'on tire une droite *SP* du sommet *S* d'un cone au centre *F* de sa base, & qu'on prenne sur elle une partie *FP* égale au quart de *SF*; le point *P* sera le centre de gravité de ce cone. Car le centre *F* de la base du cone est le centre de gravité de cette base, & le cone peut être regardé comme une pyramide d'une infinité de côtés.

Corollaire V.

Fig. 28. 51. Une pyramide quelconque étant imaginée composée de lames parallèles & semblables à sa base, & supposant une droite *ZF* tirée du sommet à un point quelconque *F* de la base; on a vû (*Géom. n°.* 442.) que chaque lame telle que *RSTVX*, sera à la base *ABCDE*, comme le quarré de la portion *ZY* comprise entre cette lame & le sommet, est au quarré de la ligne entière *ZF*; en sorte que toutes les lames de la pyramide seront proportionnelles aux quarrés des portions de la droite *ZF*, comprises entr'elles & le sommet *Z*.

Si l'on suppose maintenant que la droite *ZF* est tirée du sommet *Z* au centre de gravité de la base

ABCDE, & passe par conséquent par les centres de gravité de toutes les lames parallèles à cette base; on reconnoîtra que la pyramide est un assemblage d'élémens qui ont leurs centres de gravité dans une même droite *ZF*, & qui sont proportionnels aux quarrés des distances de leurs centres de gravité à un même point *Z* où est le premier élément : & l'on en conclurra que toute figure dont les élémens auront leurs centres de gravité en ligne droite, & seront proportionnels aux quarrés des distances de leurs centres de gravité au premier élément, aura son centre de gravité placé dans la même droite, de manière que la portion de cette ligne comprise entre le centre de gravité de la figure & celui du dernier élément qui sera le plus grand, sera égale au quart de cette ligne entière.

CHAPITRE III.

Des systèmes de corps, & des figures dont on trouve les centres de gravité par le moyen des centres de gravité des parties qui les composent.

SECONDE PROPOSITION FONDAMENTALE.

THÉOREME.

52. LORSQUE *deux poids* K, L, *attachés aux* Fig. 31
extrémités d'une droite inflexible AC *considérée sans pesanteur & suspendue par un fil* EF, *restent immobiles; ces poids sont entr'eux en raison réciproque des parties de la droite* AC *comprises entre le fil* EF *& leurs directions; c'est-à-dire, que* K : L :: CF : AF.

Démonstration.

Imaginons qu'une droite inflexible *MN* sans pesanteur passe par les centres de gravité *B*, *D* des deux corps *K*, *L*. Cette droite inflexible sans pesanteur n'ajoûtant rien aux deux corps *K*, *L*, il est évident que ces deux corps resteront immobiles, & dans la situation où on les supposoit avant l'addition de la droite *MN* à leur systême.

Supposons que le poids de la moitié de la somme des deux corps *K*, *L* est également partagé à tous les points de la partie inflexible *BD* qui joint les centres de gravité de ces deux corps, & que la moitié du poids *K* se trouve distribuée le long de *BO*; il est clair que la moitié de l'autre poids *L* sera répandue le long de *DO*, en sorte que les poids *K*, *L* seront proportionnels aux deux parties *BO*, *DO* de la droite inflexible *BD*; c'est-à-dire, que l'on aura $K : L :: BO : DO$.

Supposons $BM = BO$, pour partager à tous les points de la partie inflexible *BM* l'autre moitié du poids *K*; en sorte que le poids *K* entier soit uniformément répandu le long de *MO*, & que le centre de gravité de ce corps ainsi distribué se trouve au milieu *B* de *MO*.

Faisons aussi $DN = DO$, pour distribuer à tous les points de *DN* l'autre moitié du poids *L*; en sorte que le poids *L* entier soit uniformément répandu le long de *NO*, & que le centre de gravité de ce corps se trouve dans le milieu de cette ligne *NO*.

Les deux poids *K*, *L* étant ainsi arrangés & distribués le long de la droite inflexible *MN* qui sera double de sa partie *BD*; il est clair que les centres de

gravité de ces deux corps n'auront point changé de place, puisqu'ils seront toûjours aux extrémités *B*, *D* des cordons verticaux *AB*, *CD*. Ainsi ces poids *K*, *L* répandus ou non répandus le long de la droite inflexible *MN*, agiront toûjours de toute leur pesanteur & de la même façon sur les extrémités de la droite inflexible *AC*: d'où il suit que le premier équilibre supposé ne sera point rompu, & que le système soutenu par le fil *EF* restera immobile.

De plus la somme des poids des deux corps, *K*, *L* étant également distribuée à tous les points de la droite inflexible *MN*, le centre de gravité du système sera au milieu G de cette ligne : & comme tout le système est soutenu par le fil *EF*, le centre de gravité de la droite inflexible *MN*, c'est-à-dire son milieu *G*, qu'on peut regarder comme le seul point chargé de tout le poids de ce système, doit être dans la direction verticale de ce fil *EF* (*n°.* 15.).

Nous allons maintenant démontrer que les poids *K*, *L*, ou les droites *BQ*, *DO* qui leur sont proportionnelles, sont dans le même rapport que *CF* & *AF*.

Nous venons de voir que *G* est le milieu de *MN*, & nous avons fait la droite inflexible *MN* égale au double de *BD*, puisque (*constr.*) $BM = BO$ & $DN = DO$. Ainsi $MG = BD$. Or retranchant *BG* de chaque membre, on aura *MB* ou $BO = DG$; & ajoûtant *OG* à chaque membre de cette dernière égalité, on aura $BG = DO$. Donc puisque $K : L :: BO : DO$, on aura aussi $K : L :: DG : BG$.

Les directions des cordons *AB*, *CD*, *EF* étant verticales, & par conséquent parallèles entr'elles; les

droites *BD*, *AC* seront coupées en parties proportionnelles par ces directions. Ainsi l'on aura cette proportion *DG* : *BG* :: *CF* : *AF*.

Mais nous venons de voir que *K* : *L* :: *DG* : *BG*. Donc on aura enfin *K* : *L* :: *CF* : *AF*; c'est-à-dire que deux poids appliqués aux extrémités d'une droite inflexible *AC* soutenue en équilibre par un cordon *EF*, sont en raison réciproque des parties de cette droite, comprises entre les directions *AB*, *CD* de ces poids, & le cordon *EF*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 31. 53. Et réciproquement, deux poids *K*, *L* appliqués aux extrémités d'une droite inflexible *AC*, sont soutenus en équilibre par un cordon *EF* appliqué à cette droite inflexible, lorsque les parties de la droite *AC* comprises entre les directions de ces poids & le cordon *EF*, sont en raison réciproque de ces poids; c'est-à-dire lorsque *K* : *L* :: *CF* : *AF*.

Car après avoir fait *K* : *L* :: *CF* : *AF*, si les corps *K*, *L* n'étoient point en équilibre sur le point *F* de la droite inflexible *AC*, on pourroit les mettre en équilibre sur quelqu'autre point *I* de la même droite; & l'on trouveroit (*n°*. 52.) *K* : *L* :: *CI* : *AI*. On auroit donc *CF* : *AF* :: *CI* : *AI*, & par conséquent $CF + AF : AF : CI + AI : AI$, c'est-à-dire *AC* : *AF* :: *AC* : *AI*; ce qui seroit absurde.

Donc il est impossible que deux corps *K*, *L* appliqués aux extrémités d'une droite inflexible *AC*, ne soient point en équilibre sur un point *F* de cette ligne, lorsque l'on a *K* : *L* :: *CF* : *AF*.

COROLLAIRE II.

54. Puisque dans le cas où les deux corps K, L, que l'on regarde comme les seules choses pesantes dans le système, sont soutenus en équilibre par le cordon EF, on trouve $K : L :: CF : AF$; on aura aussi (*componendo*) $K + L : K : L :: CF + AF : CF : AF$; c'est-à-dire que (en nommant E la charge $K + L$ du cordon EF, & prenant AC pour $CF + AF$) on aura $E : K : L :: AC : CF : AF$. Fig. 31.

Et réciproquement, puisque dans le cas où l'on trouve $K : L :: CF : AF$, les corps K, L sont en équilibre sur le point F de la droite inflexible AC, ils seront aussi en équilibre sur le même point F, lorsqu'on trouvera $\left\{\begin{array}{l} K + L : L :: AC : AF \\ \text{ou } K + L : K :: AC : CF \end{array}\right\}$. Car dans ces deux cas on aura (*dividendo*) $K : L :: CF : AF$.

COROLLAIRE III.

55. Les longueurs des cordons AB, CD ne pouvant rien ajoûter aux actions des poids K, L sur les extrémités de la droite AC, à moins que ce ne soit par leur pesanteur ; si l'on suppose ces cordons sans pesanteur, ou que l'on comprenne leurs pesanteurs dans celles des poids K, L, il est clair qu'en appliquant immédiatement les centres de gravité de ces deux corps K, L aux extrémités de la droite AC soûtenue par le cordon EF, l'équilibre subsistera toûjours ; & qu'en appelant encore E la charge du fil EF, on aura $E : K : L :: AC : CF : AF$. Fig. 31. Fig. 32.

Comme on n'a supposé dans la Proposition fondamentale & dans ses Corollaires, aucune situation particulière à la droite AC ; *on peut dire que le système sera toûjours immobile dans toutes les situations qu'on voudra lui donner.*

toutes les fois qu'on aura K : L :: CF : AF, *ou qu'on aura* K + L : K : L :: AC : CF : AF.

COROLLAIRE IV.

Fig. 32. 56. Donc le centre de gravité du système de deux corps *K*, *L*, est un point *F* situé dans la droite *AC* qui joint leurs centres de gravité, de manière que *K* : *L* :: *CF* : *AF*, ou (*componendo*) de manière que *K* + *L* : *K* : *L* :: *AC* : *CF* : *AF*.

Car nous venons de voir qu'en soûtenant le système de ces deux corps par un tel point *F*, au moyen d'un fil *EF*, il restera immobile dans toutes les situations qui lui seront données.

COROLLAIRE V.

Fig. 32. 57. La proportion *K* : *L* :: *CF* : *AF*, qui signifie que deux poids sont entr'eux réciproquement comme les distances de leurs centres particuliers de gravité au centre de gravité du système, donnera :

1°. $AF = \frac{L \times CF}{K}$; ainsi connoissant *K*, *L*, & *CF*, on aura *AF*.

2°. $CF = \frac{K \times AF}{L}$; ainsi connoissant *K*, *L*, & *AF*, on aura *CF*.

3°. $\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{L \times CF}{AF} \\ L = \frac{K \times AF}{CF} \end{array} \right\}$ ainsi connoissant *CF*, *AF*, & l'un des deux corps *L*, *K*, on aura l'autre corps K ou *L*.

Les proportionnelles *K* + *L* : *K* : *L* :: *AC* : *CF* : *AF* donnent encore ces deux proportions :

$\left\{ \begin{array}{l} K + L : K :: AC : CF. \\ K + L : L :: AC : AF. \end{array} \right\}$ dont on conclurra :

1°. $\left\{ \begin{array}{l} CF = \dfrac{K \times AC}{K + L} \\ AF = \dfrac{L \times AC}{K + L} \end{array} \right\}$ ainsi connoissant les deux poids K, L, & la distance AC de leurs centres de gravité particuliers, on aura la distance de chaque centre particulier au centre de gravité du systême.

2°. $AC = \dfrac{(K + L) \times CF}{K} = \dfrac{(K + L) \times AF}{L}$; ainsi connoissant les deux corps K, L, avec la distance du centre de gravité de l'un d'eux au centre de gravité de leur somme, c'est-à-dire de leur systême, on aura la distance AC comprise entre les centres particuliers de gravité de ces deux corps.

3°. $\left\{ \begin{array}{l} K = \dfrac{(K + L) \times CF}{AC} \\ L = \dfrac{(K + L) \times AF}{AC} \end{array} \right\}$ ainsi connoissant la somme des deux poids K, L, la distance entre leurs centres particuliers de gravité, & la distance du centre de l'un d'eux au centre de gravité F du systême, on connoîtra le poids de chaque corps en particulier.

4°. $K + L = \dfrac{K \times AC}{CF} = \dfrac{L \times AC}{AF}$; ainsi connoissant le poids de l'un des deux corps K, L, avec la distance du centre de gravité particulier de chacun d'eux au centre de gravité du systême, on aura la somme des poids de ces deux corps.

PROBLEME.

58. *Etant donnés les poids de tant de corps* K, L, M, N *que l'on voudra, avec les situations de leurs centres particuliers de gravité* A, B, D, F; *trouver le centre de gravité du systême de tous ces corps, soit que* Fig. 33.

leurs centres particuliers de gravité se trouvent ou ne se trouvent pas dans un même plan.

SOLUTION.

On joindra les centres de gravité *A*, *B* de deux quelconques des corps donnés par une droite *AB*: divisant ensuite cette droite en *C*, de manière que l'on ait *K* + *L* : *L* :: *AB* : *AC*, le point *C* sera le centre de gravité du système des deux corps *K*, *L*; & l'on pourra regarder la somme de ces deux corps comme un seul corps qui auroit son centre de gravité en *C*.

On joindra de même par une droite *CD* le centre de gravité *C* du systême des deux corps *K*, *L* & le centre de gravité *D* d'un troisième corps quelconque *M*: & ayant divisé cette droite *CD* en *E*, de manière que l'on ait K + *L* : *M* :: *ED* : *CE*, ou (*componendo*) K + *L* + *M* : *M* :: *CD* : *CE*, le point *E* sera le centre de gravité du système des trois corps *K*, *L*, *M*, les deux corps *K*, *L* devant être regardés comme un seul corps réuni au centre de gravité *C*; & (*n°*. 56.) ce corps K + *L* fera équilibre avec le corps *M* sur un point *E*, situé de manière que K + *L* : *M* :: *ED* : *CE*.

Enfin l'on joindra par une droite *EF* le centre de gravité *E* du système des trois corps *K*, *L*, *M* & le centre de gravité *F* du quatrième corps *N*; puis on divisera cette droite *EF* en *G*, de manière que *K* + *L* + *M* + *N* : *N* :: *EF* : *EG*: & le point *G* sera le centre de gravité du système des quatre corps *K*, *L*, *M*, *N*; puisque *E* étant le centre de gravité du système des trois corps *K*, *L*, *M*, la somme *K* + *L* + *M* des poids de ces trois corps, doit être censée ne faire qu'un même corps dont le

centre de gravité est en E; & pour mettre ce corps en équilibre avec le poids N, sur un point G, il faudra (n°. 56.) que $K + L + M : N :: GF : EG$, ou (*componendo*) $K + L + M + N : N :: EF : EG$.

On déterminera de la même façon le centre de gravité du système d'un plus grand nombre de corps.

COROLLAIRE.

59. On trouvera par le moyen de ce Problème le centre de gravité N d'un plan rectiligne quelconque $ABCDEF$, comme il suit : Fig. 34.

On divisera le polygone en triangles ABC, ACD, ADE, AEF, & l'on cherchera les centres de gravité particuliers G, H, I, K de ces triangles ; puis ayant joint deux G, H de ces centres par une droite GH qui contiendra nécessairement le centre de gravité des deux triangles ABC, ACD, on divisera cette droite en L, de manière que l'on ait cette proportion : l'*aire* $ABCD$: l'*aire* $ABC :: GH : HL$; & ce point L sera (n°. 56.) le centre de gravité du système des deux triangles ABC, ACD, c'est-à-dire de l'aire $ABCD$.

On joindra par une droite LI le centre de gravité L que l'on vient de trouver avec le centre de gravité I d'un autre triangle ADE; & considérant que tout le poids de l'aire $ABCD$ est en L, & que celui de l'aire ADE est en I, on divisera LI en M, de manière qu'on ait cette seconde proportion : l'*aire* $ABCDE$: l'*aire* $ADE :: LI : LM$; & le point M sera le centre de gravité de l'aire $ABCDE$.

On joindra pareillement par une droite MK le centre de gravité M qui vient d'être trouvé avec

le centre de gravité *K* du triangle *AEF*; puis on divisera la droite *MK* en *N*, de manière que l'on ait l'*aire ABCDEF* : l'*aire AEF* :: *MK* : *MN*; & le point *N* sera le centre de gravité du plan rectiligne *ABCDEF*.

REMARQUE.

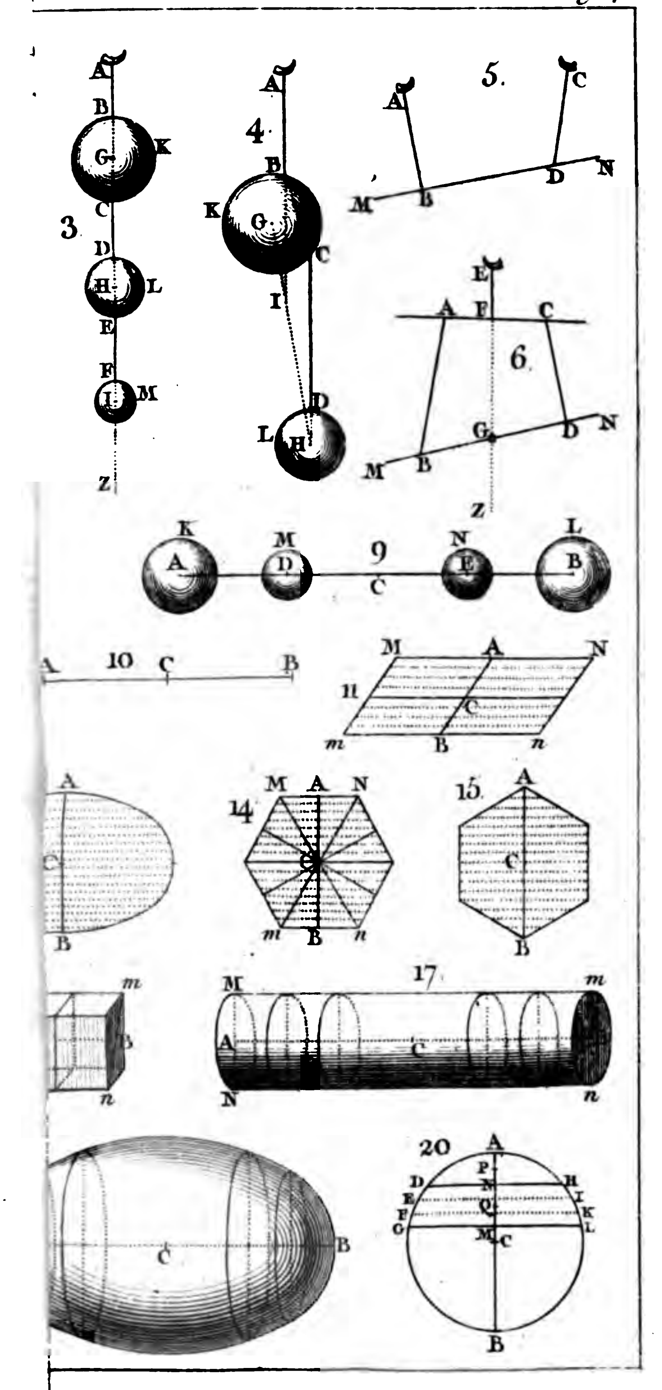
Fig. 35. 60. On doit remarquer qu'il est indifférent quel ordre on suive pour chercher le centre de gravité du polygone *ABCDEF*; & qu'au lieu de prendre les triangles de suite comme ils se présentent, & comme nous les avons pris, on auroit pû suivre un ordre tout différent, par exemple celui-ci.

Après avoir cherché le centre de gravité de chacun des triangles qui composent la figure plane proposée, on auroit pû joindre par une droite *GK* les centres de gravité des deux triangles *ABC*, *AEF*; puis diviser cette droite en *L*, de manière que l'on eût l'*aire*(*ABC* + *AEF*) : l'*aire ABC* :: *GK* : *KL*: & le point *L* auroit été le centre de gravité du systême des deux triangles *ABC*, *AEF*.

On pouvoit pareillement joindre par une droite *HI* les centres de gravité *H*, *I* des deux triangles *ACD*, *ADE*, diviser cette droite en *M*, de manière que l'*aire ACDE* : l'*aire ADE* :: *HI* : *HM*; & l'on auroit eu le point *M* pour le centre de gravité de la figure *ACDE*.

Enfin l'on auroit joint par une droite *LM* les deux centres de gravité *L*, *M*, & l'on auroit encore divisé cette droite en *N*, suivant cette proportion : l'*aire ABCDEF* : l'*aire ACDE* :: *LM* : *LN*; & le point *N* auroit été le centre de gravité du plan rectiligne *ABCDEF*.

CHAPITRE


3
4
5
6
9
10
11
14
15
17
20

22.

23.

24.

25.

6.

27

29.

30.

CHAPITRE IV.

Des figures dont on trouve les centres de gravité en considérant leurs momens.

DÉFINITIONS.

61. LE produit fait du poids d'un corps & de la distance qu'il y a du centre de gravité de ce corps à un point ou à une ligne droite quelconque, s'appelle *Moment* ou *Energie* de ce corps relativement à ce point ou à cette ligne : le terme *Moment* est le plus usité.

Il suit de là que si le moment d'un corps, relativement à un point ou à une ligne, est divisé par le poids de ce corps, le quotient sera la distance du centre de gravité de ce corps à ce point ou à cette ligne.

Le point par rapport auquel on considère le moment d'un corps se nomme *Centre du moment* de ce corps; & si l'on prend le moment d'un corps relativement à une ligne droite, cette droite s'appelle l'*Axe du moment* de ce corps.

Lorsque tous les corps d'un même système ont leurs centres de gravité en ligne droite, on considère ordinairement les momens particuliers de ces corps par rapport à un même point quelconque pris entre ces corps ou au-delà de ces corps dans la ligne, ou dans le prolongement de la ligne qui passe par tous leurs centres de gravité.

Ainsi lorsqu'un système n'est composé que de deux corps K, L, on prend le plus souvent les momens de ces deux corps par rapport à un même point I de la droite AC prolongée ou non prolongée au-delà des Fig. 36 & 37.

centres de gravité *A*, *C* de ces corps, & l'on exprime le moment du corps *K* par $K \times AI$, celui du corps *L* par $L \times CI$; & le moment du ſyſtème de ces deux corps qui ſont cenſés raſſemblés à leur centre de gravité commun *F*, eſt repréſenté par $(K + L) \times FI$, ou par $K \times FI + L \times FI$.

Fig. 40 & 41. Lorſque les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, qui compoſent un ſyſtème, ſont dans un même plan & n'ont pas tous leurs centres de gravité dans une même ligne droite, on conſidère leurs momens par rapport à un même axe *YZ* auquel on mène des perpendiculaires *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, *E*e, *I*i des centres de gravité de tous les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, pour avoir les diſtances de ces centres de gravité à l'axe *YZ* des momens; & l'on exprime le moment du corps *K* par $K \times A$a, le moment du corps *L* par $L \times B$b, celui du corps *M* par $M \times C$c, celui du corps *N* par $N \times D$d, celui du corps *O* par $O \times E$e, & celui du corps *P* par $P \times I$i. Enfin le moment du ſyſtème de tous ces corps imaginés réunis à un centre de gravité commun *R*, c'eſt-à-dire à celui du ſyſtème, s'exprime par $(K + L + M + N + O + P) \times R$r, ou par $K \times R$r $+ L \times R$r $+ M \times R$r $+ N \times R$r $+ O \times R$r $+ P \times R$r.

Quoique les droites *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, *E*e, *I*i, par leſquelles on multiplie les poids des corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* pour avoir leurs momens, repréſentent les diſtances des centres de gravité de ces corps à l'axe des momens, & doivent par conſéquent être perpendiculaires à cet axe; on tire quelquefois ces droites *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, *E*e, *I*i obliquement à l'axe & parallèlement entr'elles; mais alors ces lignes s'appellent *Diſtances obliques* des centres de gravité des corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* à l'axe *YZ*, & cet axe

YZ se nomme *Axe oblique* des momens des corps *K, L, M, N, O, P.*

Lorsque le centre ou l'axe par rapport auquel on considère les momens des corps d'un systême, est au centre de gravité de l'un de ces corps, ce corps n'a point de moment : car la distance de son centre de gravité au centre ou à l'axe d'après lequel on prend le moment, est nulle ; & par conséquent le moment qui est le produit de cette distance nulle, par le poids de ce corps, est aussi nulle, c'est-à-dire zéro. Il suit de là que le systême de deux corps *K, L* n'a point de moment par rapport à son centre de gravité *F*, puisque les corps qui composent le systême entier sont censés réunis à ce centre de gravité. Fig. 36.

62. Lorsque les corps *K, L, M, N, O, P* qui composent un systême, sont distribués des deux côtés de l'axe *YZ* ou du centre *r* par rapport auquel on considère leurs momens ; les momens des corps *K, L, M, N* qui sont d'un côté, & ceux des corps *O, P* qui sont de l'autre côté, se nomment *momens opposés* ; parce que ces corps tendent à faire tourner le systême en sens opposés sur l'axe *YZ* ou sur le centre *r* des momens. Fig. 41 & 43.

Mais si les corps d'un même systême sont d'un même côté de l'axe *YZ* ou du centre *r* des momens, les momens de tous ces corps s'appellent *momens convergens* ou *momens de même sens* ; parce que tous les corps tendent à faire tourner le systême du même sens sur l'axe *YZ* ou sur le centre *r* des momens. Fig. 40 & 42.

COROLLAIRE.

63. Donc les momens de deux corps *K, L* sont égaux, quand ils sont considérés par rapport au centre Fig. 36, 37, 38 & 39.

de gravité *F* de leur système, ou relativement à un axe quelconque *GH* qui passe par ce centre de gravité.

Fig. 36 & 37. Car si *F* est le centre de gravité des deux corps *K*, *L*, on aura (*n°*. 56.) $K : L :: CF : AF$; ainsi $K \times AF = L \times CF$; c'est-à-dire que les momens de deux corps *K*, *L* sont égaux par rapport à leur centre commun de gravité *F*.

Fig. 38 & 39. Si l'on considère les momens des mêmes corps *K*, *L* relativement à un axe quelconque *GH* mené par le centre de gravité *F* du système de ces deux corps, les parallèles *AG*, *CH* qui entreront dans la composition des momens des corps *K*, *L* par rapport à l'axe *GH*, rendront semblables les triangles *AFG*, *CFH*; ainsi l'on aura $AG : CH :: AF : CF$. Mais (*n°*. 56.) $AF : CF :: L : K$. Donc $AG : CH :: L : K$, & par conséquent $K \times AG = L \times CH$; c'est-à-dire que les momens des corps *K*, *L* sont égaux, lorsqu'ils sont considérés relativement à un axe quelconque *G H* mené par le centre de gravité *F* de leur système.

THÉOREME.

64. *Si des centres de gravité particuliers* A, C *de deux*
Fig. 38 & 39. *corps* K, L, *& du centre de gravité* F *de leur système, on mène vers un même axe* YZ *des parallèles* AB, CD, FE *perpendiculaires ou obliques à cet axe; en sorte que les produits* $K \times AB$, $L \times CD$, $(K + L) \times FE$ *représentent les momens des corps* K, L *& celui de leur système relativement à l'axe* YZ *perpendiculaire ou oblique :*

Fig. 38. 1°. *Dans le cas où les deux corps* K, L *seront d'un même côté de l'axe* YZ, *l'on aura cette égalité* $K \times AB + L \times CD = (K + L) \times FE$; *c'est-*

à-dire que la somme des momens des deux corps K, L *sera égale au moment du centre de gravité* F *du système de ces mêmes corps.*

2°. *Dans le cas où l'axe* YZ *des momens passera entre les deux corps* K, L, *on aura cette autre égalité* $K \times AB - L \times CD = (K + L) \times FE$; *c'est-à-dire que la différence des momens des deux corps* K, L *sera égale au moment du centre de gravité* F *de leur système.* Fig. 39.

DÉMONSTRATION.

Par le centre de gravité F du système soit tirée parallèlement à l'axe YZ une droite GH qui rencontrera en G, H les deux parallèles AB, CD prolongées s'il est nécessaire : on aura $GB = FE = HD$. Ainsi Fig. 38 & 39.

PARTIE I. Dans le cas où les deux corps K, L seront d'un même côté de l'axe YZ, on aura Fig. 38.

$$AB \text{ ou } GB - AG = FE - AG.$$
$$\& \; CD \text{ ou } CH + HD = CH + FE.$$

Donc $K \times AB = K \times (FE - AG) = K \times FE - K \times AG$,
&...... $L \times CD = L \times (CH + FE) = L \times CH + L \times FE$;
ainsi $K \times AB + L \times CD = K \times EF - K \times AG + L \times CH + L \times FE$.

Mais $K \times AG$, $L \times CH$ sont les momens des deux corps K, L par rapport à un axe GH qui passe par le centre de gravité F du système de ces deux corps ; ainsi (n°. 63.) ces momens sont égaux, & par conséquent $- K \times AG + L \times CH$ se détruisent mutuellement.

Donc $K \times AB + L \times CD = K \times FE + L \times FE$.
Or $K \times FE + L \times FE = (K + L) \times FE$.
Ainsi $K \times AB + L \times CD = (K + L) \times FE$.
C. Q. F. 1°. D.

Fig. 39. PARTIE II. Dans le cas où l'axe YZ passera entre les deux corps K, L, on aura

AB ou $AG+GB = AG+FE$, & CD ou $CH-HD = CH-FE$;

$$\text{ainsi } K\times AB = \begin{Bmatrix} K\times AG \\ +K\times FE \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K\times AG \\ +K\times FE \\ +L\times FE \\ -L\times FE, \end{Bmatrix}$$

& $L\times CD = L\times CH - L\times FE$.

Donc si l'on retranche cette dernière égalité de la précédente, on aura

$K\times AB - L\times CD = K\times AG + K\times FE + L\times FE - L\times CH$.

Mais (n°. 63.) $K\times AG = L\times CH$; ainsi les deux termes $K\times AG - L\times CH$ se détruisent mutuellement.

Donc $K\times AB - L\times CD = K\times FE + L\times FE = (K+L)\times FE$. C. Q. F. 1°. D.

COROLLAIRE.

Fig. 38 & 39. 65. Les droites AB, CD, FE tirées vers l'axe YZ des momens par les centres de gravité A, C des corps K, L, & par celui F de leur système, ayant été supposées seulement parallèles entr'elles, elles peuvent avoir telle obliquité qu'on voudra par rapport à la droite AC, & peuvent s'approcher de cette droite au point de se confondre avec elle.

Supposons que la première AB de ces trois parallèles se confond avec le prolongement ou une partie AI de la droite AC: la seconde parallèle CD se confondra avec CI, & la troisième FE avec FI; en sorte que les momens $K\times AB$, $L\times CD$, $(K+L)\times FE$ deviendront $K\times AI$, $L\times CI$, $(K+L)\times FI$.

Mais quelle que soit la position des parallèles AB, CD, FE, on vient de voir (n°. 64.) que

Fig. 38. 1°. Dans le cas où le point I sera dans le pro-

longement de la droite AC qui joint les centres de gravité des deux corps K, L, on aura toûjours $K \times AB + L \times CD = (K + L) \times FE$. Ainsi l'on aura aussi $K \times AI + L \times CI = (K + L) \times FI$.

2°. Et dans le cas où le point I sera pris dans la droite AC entre les centres de gravité des corps K, L, on aura $K \times AB - L \times CD = (K + L) \times FE$. Ainsi l'on aura aussi $K \times AI - L \times CI = (K + L) \times FI$. Fig. 39.

C'est-à-dire que si l'on considère les momens de deux corps K, L, & celui du centre de gravité de leur système par rapport à un point I qui soit en ligne droite avec les centres de gravité de ces deux corps ; le moment du centre de gravité des deux mêmes corps K, L, sera égal à la somme ou à la différence de leurs momens, suivant que le point I sera pris dans le prolongement de la droite AC, ou dans la droite AC elle-même entre ces deux corps K, L. Fig. 36, 37, 38 & 39.

THÉOREME.

66. *Si par les centres de gravité particuliers* A, B, C, D, E, I *de tant de corps* K, L, M, N, O, P *qu'on voudra, & par le centre de gravité* R *de leur système, on mène vers un même axe* Y Z *des droites* A a, B b, C c, D d, E e, I i, R r *parallèles entr'elles & perpendiculaires ou obliques à cet axe ; en sorte que les produits* K × A a, L × B b, M × C c, N × D d, O × E e, P × I i *représentent les momens des corps* K, L, M, N, O, P, *par rapport à un axe* Y Z *perpendiculaire ou oblique, & que* (K + L + M + N + O + P) × R r *représente le moment du système de tous ces corps relativement au même axe :* Fig. 40 & 41.

1°. *Dans le cas où tous les corps du système seront d'un même côté de l'axe* Y Z *des momens, l'on aura* Fig. 40.

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ + O \times Ee \\ + P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr;$$

c'est-à-dire que la somme des momens de tous les corps du système sera égale au moment du centre de gravité R *de leur système.*

Fig. 41. 2°. *Dans le cas où l'axe* Y Z *des momens passera entre les corps du système, on aura*

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ - O \times Ee \\ - P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr;$$

c'est-à-dire que la différence qu'il y aura entre la somme des momens des corps K, L, M, N *qui seront d'un côté de l'axe* Y Z, *& la somme des momens des corps* O, P, &c. *qui seront de l'autre côté du même axe, sera égale au moment du centre de gravité* R *de tout le système.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 40 & 41. Supposant que le point *F* soit le centre de gravité du système des deux premiers corps *K*, *L*; soit tirée la droite *F*f parallèlement à *A* a ou *B* b : on aura (*n°.* 64.) $K \times Aa + L \times Bb = (K + L) \times Ff$.

Imaginant ensuite que les deux corps *K*, *L* ne composent qu'un seul corps (*K* + *L*) dont tout le poids soit appliqué au centre de gravité *F*, & supposant que G est le centre de gravité d'un système composé de ce corps *K* + *L* & du corps *M*; si l'on tire

Gg parallèlement à Ff ou à Cc, l'on aura encore (*n°.* 64.) $(K+L)\times Ff+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$. Mais on vient de voir que $K\times Aa+L\times Bb=(K+L)\times Ff$; On aura donc $K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$.

Considérant maintenant les trois corps K, *L*, *M*, comme un seul & même corps $K+L+M$ dont tout le poids est réuni au centre de gravité G de leur système, & supposant que *H* est le centre de gravité d'un nouveau système composé de ce corps $K+L+M$ & d'un second corps *N*; si l'on mène Hh parallèlement à Gg ou à Dd, on aura (*n°.* 64.) $(K+L+M)\times Gg+N\times Dd=(K+L+M+N)\times Hh$. Mais on a trouvé $K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$.

On aura donc $\left\{\begin{array}{l} K\times Aa \\ +L\times Bb \\ +M\times Cc \\ +N\times Dd \end{array}\right\}=(K+L+M+N)\times Hh$.

Enfin regardant les quatre corps *K*, *L*, *M*, *N* comme un seul corps $K+L+M+N$ dont tout le poids seroit appliqué au centre de gravité *H* de leur système; considérant aussi les deux corps O, P comme un seul corps dont tout le poids seroit réuni à leur centre de gravité commun *Q*; & supposant que *R* est le centre de gravité du système composé des deux nouveaux corps $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$: soient menées les droites Rr, Q q parallèles à Hh. Cela posé,

Lorsque les deux corps $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$ qui composent le système entier proposé, seront situés d'un même côté de l'axe YZ par rapport auquel on considère les momens, on aura (*n°.* 64.) Fig. 40.

$$\left.\begin{array}{l}(K+L+M+N)\times Hh \\ +(O+P)\times Qq\end{array}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

Fig. 41. Et lorsque les deux corps ($K+L+M+N$) & ($O+P$) dont le système est formé, seront des deux côtés de l'axe YZ par rapport auquel on considère les momens, on aura aussi (*n°.* 64.)

$$\left.\begin{array}{l}(K+L+M+N)\times Hh\\ -(O+P)\times Qq\end{array}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

Fig. 40 & 41. Mais on vient de trouver

$$\left.\begin{array}{l}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\end{array}\right\}=(K+L+M+N)\times Hh.$$

Et Qq, Ee, Ii étant parallèles, on aura (*n°.* 64.)

$$O\times Ee+P\times Ii=(O+P)\times Qq$$

$$\text{ou } -O\times Ee-P\times Ii=-(O+P)\times Qq.$$

Fig. 40. Donc 1°. dans le cas où les deux corps composés ($K+L+M+N$) & ($O+P$) seront d'un même côté de l'axe YZ, on aura

$$\left.\begin{array}{l}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\\ +O\times Ee\\ +P\times Ii\end{array}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

C. Q. F. 1°. *D.*

Fig. 41. 2°. Dans le cas où les deux corps composés ($K+L+M+N$) & ($O+P$) seront des deux côtés de l'axe YZ, on aura

$$\left.\begin{array}{l}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\\ -O\times Ee\\ -P\times Ii\end{array}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

C. Q. F. 2°. *D.*

COROLLAIRE. I.

Fig. 44 & 45. 67. Si l'axe YZ par rapport auquel on considère

les momens, passe par le centre de gravité d'un corps K du systême, la distance *A*a du centre de gravité de ce corps sera nulle, & par conséquent le moment K × *A*a de ce corps sera anéanti. Ainsi l'égalité

$$\left.\begin{array}{l} K\times Aa \\ +L\times Bb \\ +M\times Cc \\ +N\times Dd \\ +O\times Ee \\ +P\times Ii \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P)\times Rr$$

qu'on a trouvée pour le cas de la figure 40, deviendra pour celui de la figure 44

$$\left.\begin{array}{l} L\times Bb \\ +M\times Cc \\ +N\times Dd \\ +O\times Ee \\ +P\times Ii \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P)\times Rr;$$

& la seconde égalité

$$\left.\begin{array}{l} K\times Aa \\ +L\times Bb \\ +M\times Cc \\ +N\times Dd \\ -O\times Ee \\ -P\times Ii \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P)\times Rr$$

qu'on a trouvée dans le cas de la figure 41, deviendra dans celui de la figure 45

$$\left.\begin{array}{l} L\times Bb \\ +M\times Cc \\ +N\times Dd \\ -O\times Ee \\ -P\times Ii \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P)\times Rr;$$

Ainsi dans le cas où l'axe *Y Z* des momens passera par le centre de gravité de quelqu'un des corps du systême; si tous les autres corps sont d'un même

côté de l'axe, la ſomme de leurs momens particuliers ſera égale au moment du centre de gravité de tout le ſyſtème : & ſi ces autres corps ſont diſtribués des deux côtés de l'axe ; là différence qu'il y aura entre la ſomme des momens des corps ſitués d'un côté de cet axe, & la ſomme des momens des corps placés de l'autre côté du même axe, ſera égale au moment du centre de gravité de tout le ſyſtème.

COROLLAIRE II.

Fig. 40, 41, 44 & 45. 68. Puiſque le moment du centre de gravité *R* du ſyſtème entier de tant de corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* qu'on voudra, n'eſt composé que des momens particuliers des corps de ce ſyſtème ; que le moment particulier de chaque corps ne dépend que du poids de ce corps & de la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe *YZ* des momens ; & que les parties ab, bc, cd, &c. de l'axe compriſes entre les parallèles *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, &c. menées vers l'axe, n'entrent point dans la compoſition des momens ; lorſque toutes les parties ab, bc, cd, &c. de l'axe, deviendront nulles, & que toutes les parallèles *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, &c. menées vers l'axe *YZ* ſeront dans une même ligne (ce qui arrivera lorſque tous les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* auront leurs centres de gravité particuliers en ligne droite, & que l'on conſidèrera les momens par rapport à un point r de cette ligne), il eſt clair que tout ce qu'on a démontré dans le Théorème & ſon premier Corollaire, aura encore lieu ; c'eſt-à-dire que

Fig. 42. 1°. Si tous les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* ont leurs centres de gravité en ligne droite, & que l'on conſidère leurs momens par rapport à un point r pris dans le prolongement de cette ligne ; on aura,

Fig. 42, 43, 46 & 47.

en ſuppoſant que *R* eſt le centre de gravité du ſyſtème entier,

$$\left.\begin{array}{l} K \times Ar \\ + L \times Br \\ + M \times Cr \\ + N \times Dr \\ + O \times Er \\ + P \times Ir \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P) \times Rr.$$

2°. Si tous les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* du ſyſtème dont on ſuppoſe le centre de gravité placé en *R*, ont leurs centres de gravité en ligne droite, & que l'on conſidère leurs momens par rapport à un point *r* pris dans cette ligne entre les corps du ſyſtème; on aura Fig. 43.

$$\left.\begin{array}{l} K \times Ar \\ + L \times Br \\ + M \times Cr \\ + N \times Dr \\ - O \times Er \\ - P \times Ir \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P) \times Rr.$$

3°. Tous les corps *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* ayant toûjours leurs centres de gravité en ligne droite, & le centre de gravité R de leur ſyſtème étant par conſéquent dans la même ligne droite; ſi l'on conſidère leurs momens par rapport à un point *A* qui ſoit le centre de gravité d'un corps K placé à l'extrémité du ſyſtème, on aura Fig. 46.

$$\left.\begin{array}{l} L \times BA \\ + M \times CA \\ + N \times DA \\ + O \times EA \\ + P \times IA \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P) \times RA.$$

4°. Tous les corps qui compoſent le ſyſtème ayant encore leurs centres de gravité en ligne droite; ſi l'on conſidère leurs momens par rapport au centre *A* Fig. 47.

d'un corps *K* qui ne ſoit point à l'extrémité du ſyſtème, on aura

$$\left.\begin{array}{l} L\times BA \\ +M\times CA \\ +N\times DA \\ -O\times EA \\ -P\times IA \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P)\times RA.$$

COROLLAIRE III.

69. Si l'on diviſe par la ſomme $K+L+M+N+O+P$ des poids des corps qui compoſent le ſyſtème, les différentes égalités qu'on a trouvées pour les différens cas relatifs aux figures 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46 & 47, & qu'on regarde toûjours YZ comme l'axe des momens, & R comme le centre de gravité du ſyſtème entier; l'on trouvera

pour le cas de la fig. 40. $$\frac{K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc+N\times Dd+O\times Ee+P\times Ii}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 41. $$\frac{K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc+N\times Dd-O\times Ee-P\times Ii}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 44. $$\frac{{}^{*}\quad L\times Bb+M\times Cc+N\times Dd+O\times Ee+P\times Ii}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 45. $$\frac{{}^{*}\quad L\times Bb+M\times Cc+N\times Dd-O\times Ee-P\times Ii}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 42. $$\frac{K\times Ar+L\times Br+M\times Cr+N\times Dr+O\times Er+P\times Ir}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 43. $$\frac{K\times Ar+L\times Br+M\times Cr+N\times Dr-O\times Er-P\times Ir}{K+L+M+N+O+P}=Rr$$

pour le cas de la fig. 46. $$\frac{{}^{*}\quad L\times BA+M\times CA+N\times DA+O\times EA+P\times IA}{K+L+M+N+O+P}=RA$$

pour le cas de la fig. 47. $$\frac{{}^{*}\quad L\times BA+M\times CA+N\times DA-O\times EA-P\times IA}{K+L+M+N+O+P}=RA.$$

Ainſi lorſque toutes les parties d'un ſyſtème ſeront dans un même plan, & que l'on connoîtra le poids de chacune de ces parties avec la diſtance de ſon

centre de gravité à un axe *Y Z*; on pourra toûjours trouver par ces formules la distance du centre de gravité de tout le systême au même axe *Y Z*.

COROLLAIRE IV.

70. On a vû (*n*°. 25.) que les superficies peuvent être réputées chargées également dans tous leurs points, & qu'elles peuvent par conséquent être considérées comme des poids proportionnels à leurs étendues : cela posé, l'on pourra par les principes que l'on vient d'expliquer, trouver la distance du centre de gravité d'un point quelconque rectiligne à telle ligne droite qu'on voudra, en considérant cette ligne comme un axe auquel on rapportera les momens des parties & celui de la totalité de ce plan.

Car après avoir partagé le plan proposé *E F G H I O* Fig. 52 & 53.
en triangles *E F G*, *E G H*, *E H I*, *E I O*; si l'on cherche les centres de gravité particuliers *A*, *B*, *C*, *D* de ces triangles, & qu'ayant supposé le centre de gravité de la figure entière placé en *R*, l'on mène vers un même axe *Y Z* des parallèles *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, & qu'on leur imagine encore une parallèle *R*r; en considérant les triangles *E F G*, *E G H*, *E H I*, *E I O* comme des poids *K*, *L*, *M*, *N* proportionnels à ces triangles & réunis à leurs centres de gravité particuliers *A*, *B*, *C*, *D*; il est clair que (*n*. 69.)

1°. Dans le cas où tous les poids *K*, *L*, *M*, *N*, Fig. 52.
ou les centres de gravité *A*, *B*, *C*, *D* de tous les triangles, seront d'un même côté de l'axe *Y Z*, on aura

$$\frac{K \times A\text{a} + L \times B\text{b} + M \times C\text{c} + N \times D\text{d}}{K + L + M + N} = R\text{r},$$

ou

$$\frac{EFG \times A\text{a} + EGH \times B\text{b} + EHI \times C\text{c} + EIO \times D\text{d}}{EFGHIO} = R\text{r}.$$

Fig. 52. 2°. Dans le cas où les centres de gravité particuliers A, B, C, D des triangles, seroient distribués des deux côtés d'un axe yz vers lequel on mèneroit des droites Aa, Bb, Cc, Dd, Rr parallèles entr'elles; si le centre de gravité A étoit seul d'un côté de l'axe yz, on auroit

$$\frac{EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd - EFG \times Aa}{EFGHIO} = Rr.$$

Fig. 53. 3°. Dans le cas où l'axe YZ ou yz passeroit par le centre de gravité A de quelque triangle, & que les centres de gravité des autres triangles seroient tous d'un même côté de cet axe, on auroit

$$\frac{* \; EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} = Rr,$$

ou $$\frac{* \; EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} = Rr.$$

PROBLEME.

71. *Trouver le centre de gravité d'un système composé de tant de corps qu'on voudra, situés dans un même plan.*

SOLUTION.

Fig. 48 & 49. On choisira deux axes quelconques YZ, yz qui se couperont en tel point V qu'on voudra, & qui feront entr'eux un angle quelconque YVy. Puis ayant mené par les centres de gravité particuliers des corps K, L, M, N, vers le premier axe YZ, des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au second axe yz, & vers le second axe yz des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au premier axe YZ; on trouvera (*n°. 69.*) les longueurs des droites Rr, Rr (qu'on imagine tirées par le centre de gravité inconnu R du système) la première vers le premier axe YZ parallèlement au second yz, & la seconde

seconde vers le second axe yz, parallèlement au premier.

Ensuite ayant pris sur le second axe yz une partie Vr égale à la valeur qu'on a trouvée pour Rr, & ayant mené par le point r une parallèle rQ au premier axe YZ, on sera sûr que le centre de gravité R du système est dans cette ligne rQ; en sorte que si l'on prend sur cette ligne rQ, à commencer de l'axe yz, une partie égale à la valeur qu'on a trouvée pour Rr, on aura le point R ou le centre de gravité du système proposé. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

72. Un plan rectiligne *EFGHIO* étant partagé en triangles *EFG*, *EGH*, *EHI*, *EIO*, & chaque triangle étant considéré comme un poids placé au centre de gravité de ce triangle; il est évident que le problème qu'on vient de résoudre, pour trouver le centre de gravité de tant de corps qu'on voudra, situés dans un même plan, servira à trouver le centre de gravité d'un plan rectiligne quelconque, comme on va le voir dans les exemples suivans. Fig. 52 & 53.

EXEMPLES.

73. *On demande le centre de gravité* R *d'un plan rectiligne* EFGHIO *composé de quatre triangles* EFG, EGH, EHI, EIO *dont les centres de gravité* A, B, C, D *& les étendues sont connus; ou le centre de gravité* R *du système de quatre corps* K, L, M, N *situés dans un même plan, dont les poids & l'arrangement sont donnés par les mesures suivantes.* Fig. 52, 53, 48 & 49.

On ſuppoſe les quatre triangles ou les quatre poids $\left.\begin{matrix} EFG : EGH : EHI : EIO \\ K : L : M : N \end{matrix}\right\} :: 2 : 4 : 5 : 3.$

Après avoir choiſi deux axes quelconques *YZ*, *yz*, & mené par les centres de gravité *A*, *B*, *C*, *D* des quatre triangles ou des quatre corps, vers le premier axe *YZ*, des parallèles *A*a, *B*b, *C*c, *D*d au ſecond axe *yz*, & vers le ſecond axe *yz* des parallèles *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd* au premier axe *YZ*, on imaginera encore par le centre de gravité *R* du ſyſtème des parallèles *R*r, *R*r aux mêmes axes, terminées par ces deux axes.

Fig. 52 & 48. Si l'on ſuppoſe *A*a : *B*b : *C*c : *D*d :: 10 : 15 : 27 : 37, comme dans le cas des figures 52 & 48, où tous les centres de gravité particuliers ſont d'un même côté de l'axe *YZ*, on aura

$$Rr \text{ ou } \left\{ \begin{matrix} \dfrac{EFG \times Aa + EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{K \times Aa + L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{20 + 60 + 135 + 111}{14} \\ \text{ou } 23\tfrac{2}{7}. \end{matrix} \right.$$

Ainſi prenant ſur le ſecond axe *yz*, à commencer du point *V* où ſe coupent les deux axes, une partie $Vr = 23\frac{2}{7}$, & menant par le point *r* une droite *r*Q parallele au premier axe *YZ*, le centre de gravité *R* du ſyſtème ſera ſûrement dans cette droite *r*Q, & l'on n'aura plus qu'à trouver la diſtance *Rr* de ce centre de gravité au ſecond axe *yz*.

Suppoſons que le ſecond axe *yz* paſſe entre le centre de gravité *A* de la premiere partie du ſyſtème, & les centres de gravité *B*, *C*, *D* des autres parties; & que par les meſures données ou priſes ſur la figure, on a trouvé les diſtances

$Aa : Bb : Cc : Dd :: 7 : 9\frac{1}{2} : 17 : 13\frac{2}{3}$,
on aura (*n°.* 69.)

$$Rr \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd - EFG \times Aa}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd - K \times Aa}{K + L + M + N} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{38 + 85 + 41 - 14}{14} \\ \text{ou } 10\frac{5}{7}. \end{array} \right.$$

Ainsi prenant sur rQ qu'on vient de trouver, une partie $rR = 10\frac{5}{7}$, le point R sera le centre de gravité du système proposé.

Ordinairement on mène les deux axes YZ, yz auxquels on rapporte les momens, par le centre de gravité particulier A de quelque partie du système, & pour s'épargner l'embarras d'avoir à distinguer les momens qui doivent avoir le signe + & ceux qui doivent avoir le signe —, on fait en sorte que les centres de gravité B, C, D de toutes les autres parties, soient placés d'un même côté des axes que l'on choisit. Fig. 53 & 49.

Supposons encore $\left\{ \begin{array}{l} \text{les triangles } EFG : EGH : EHI : EIO \\ \text{ou les poids } K : L : M : N \end{array} \right\} :: 2 : 4 : 5 : 3$,

les droites menées de leurs centres de gravité $\left\{ \begin{array}{l} \text{à l'axe } YZ ; {}^* Bb : Cc : Dd :: {}^* 5 : 17 : 27 \\ \text{à l'axe } yz ; {}^* Bb : Cc : Dd :: {}^* 16\frac{1}{2} : 24 : 20\frac{2}{3}, \end{array} \right.$

on trouvera (*n°.* 69)

$$Rr \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{{}^* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{{}^* L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{{}^* 20 + 85 + 81}{14} \\ \text{ou } 13\frac{2}{7} \end{array} \right.$$

$$\& \; Rr \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{{}^* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{{}^* L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{{}^* 66 + 120 + 62}{14} \\ \text{ou } 17\frac{5}{7}. \end{array} \right.$$

Ainsi prenant d'abord sur le second axe yz, à

commencer du point V ou A où ſe coupent les deux axes, une partie Ar de $13\frac{2}{7}$, & menant par le point r une droite rQ parallèle au premier axe YZ, le centre de gravité R qu'on demande ſera dans cette droite rQ; puis prenant ſur la droite rQ une partie $Rr = 17\frac{5}{7}$, le point R qu'on déterminera, ſera le centre de gravité du ſyſtème propoſé.

Fig. 50 & 51. *Il eſt évident que, ſi les centres de gravité* A, B, C, D *des mêmes corps* K, L, M, N *étoient diſpoſés en ligne droite, le centre de gravité* R *de leur ſyſtème ſeroit dans la même ligne droite, & qu'on n'auroit pas beſoin de deux axes, mais ſeulement d'un axe* YZ, *pour déterminer la poſition du centre de gravité* R *de ce ſyſtème; ainſi l'on ſe contenteroit de chercher* (n°. 69) *la diſtance de ce centre de gravité* R *à un point* V *pris dans la ligne des centres de gravité ou dans ſon prolongement.*

Fig. 50. Suppoſons { les poids des corps $K : L : M : N :: 2 : 4 : 5 : 3$; les diſtances de leurs centres de gravité à l'axe YZ } $AV : BV : CV : DV :: 10 : 15 : 27 : 37$,

on aura

$$RV \text{ ou } \frac{K\times AV + L\times BV + M\times CV + N\times DV}{K+L+M+N} = \frac{20+60+135+111}{14} = 23\frac{2}{7}.$$

Ainſi le centre de gravité du ſyſtème des corps K, L, M, N *ſera déterminé.*

Fig. 51. Suppoſons encore { les poids des mêmes corps $K : L : M : N :: 2 : 4 : 5 : 3$; les diſtances de leurs centres de gravité particuliers à celui A d'un corps extrême } * $BA : CA : DA :: {}^*5 : 17 : 27$,

$$\text{on aura } RA \text{ ou } \frac{{}^*L\times BA + M\times CA + N\times DA}{K+L+M+N} = \frac{{}^*20+85+81}{14} = 13\frac{2}{7}.$$

Ainſi l'on connoîtra la poſition du centre de gravité commun de tous les corps propoſés.

REMARQUE.

74. Jusques ici l'on a toûjours supposé que les centres de gravité de tous les corps ou de toutes les parties d'un même systême étoient dans un même plan, & l'on a considéré leurs momens relativement à un axe situé dans ce plan. Fig. 54.

S'il arrivoit que les centres de gravité des parties K, L, M, N d'un même systême, ne fussent pas tous dans un même plan, l'on considéreroit leurs momens, non par rapport à un axe, mais relativement à un plan YZ vers lequel on mèneroit ou l'on imagineroit par les centres de gravité particuliers A, B, C, D, & par le centre de gravité général R, des perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Rr; cela posé, les momens des parties K, L, M, N & celui de leur systême seroient représentés par les produits suivans

$K \times Aa$; $L \times Bb$; $M \times Cc$; $N \times Dd$; $(K+L+M+N) \times Rr$.

Il est facile de prouver par un raisonnement semblable à celui du dernier Théorème, que la somme des momens des corps qui seront placés d'un même côté du plan YZ par rapport auquel on considère les momens, sera égale au moment du centre de gravité du systême de ces mêmes corps, & que la différence qu'il y aura entre la somme des momens des parties M, N placées d'un même côté du plan YZ, & la somme des momens des parties K, L situées de l'autre côté du même plan, sera égale au moment du centre de gravité R où toutes les parties du systême seront réputées rassemblées; c'est-à-dire qu'on aura

$$M \times Cc + N \times Dd - K \times Aa - L \times Bb = (K+L+M+N) \times Rr.$$

Or divisant chaque membre de cette égalité par la somme $K + L + M + N$ des poids qui

composent le système, on trouvera

$$\frac{M \times Cc + N \times Dd - \times Aa - L \times Bb}{K + L + M + N} = Rr.$$

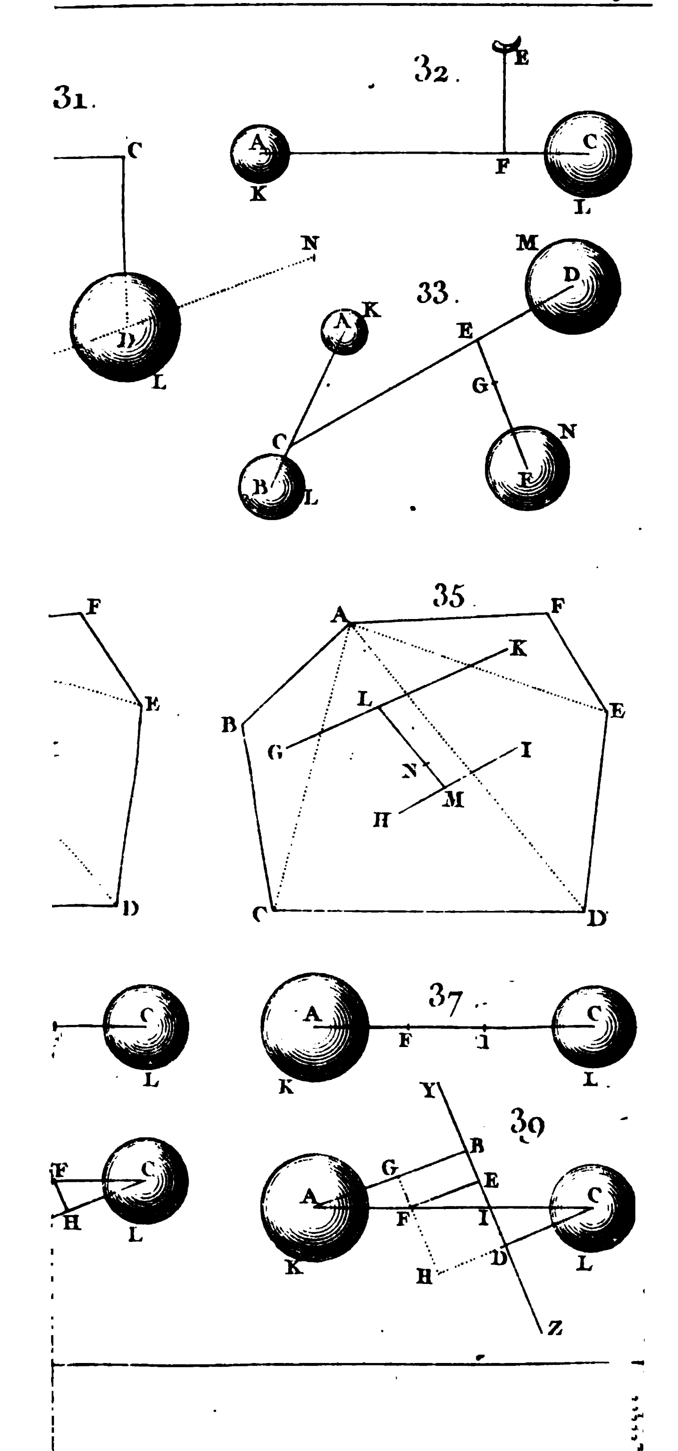
Ainsi connoissant le poids de chaque corps en particulier, & la distance de son centre de gravité au plan *YZ* par rapport auquel on considère les momens, on aura la distance *Rr* du centre de gravité de leur système au même plan *YZ*.

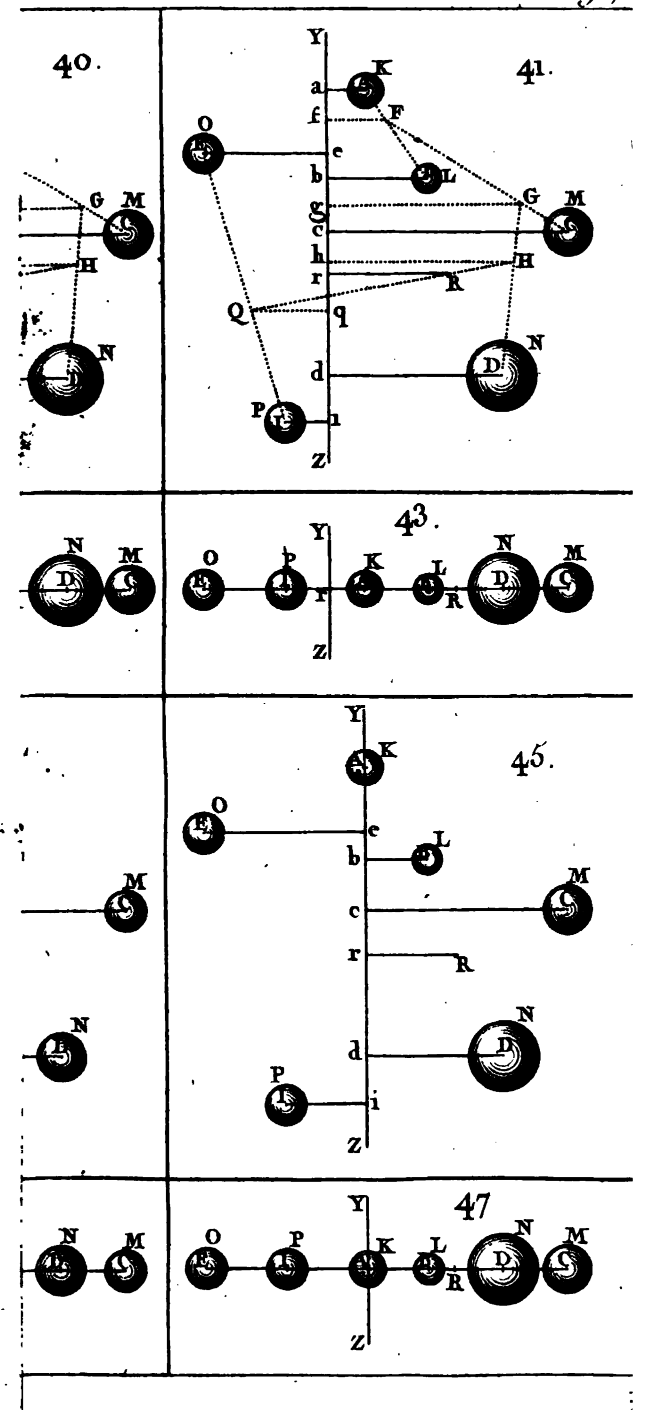
Si l'on connoît les points *a, b, c, d* où le plan *YZ* est rencontré par les droites *Aa, Bb, Cc, Dd* qui représentent les distances des centres de gravité particuliers des corps *K, L, M, N* à ce plan, & qu'ayant imaginé les poids des corps *K, L, M, N* appliqués à ces points *a, b, c, d*, l'on cherche, comme il vient d'être dit, le centre de gravité *r* du système de ces points ainsi chargés; ce point *r* sera celui où le plan *YZ* sera rencontré par la droite *Rr* qui représente la distance du centre de gravité du système des corps *K, L, M, N* au plan *YZ*.

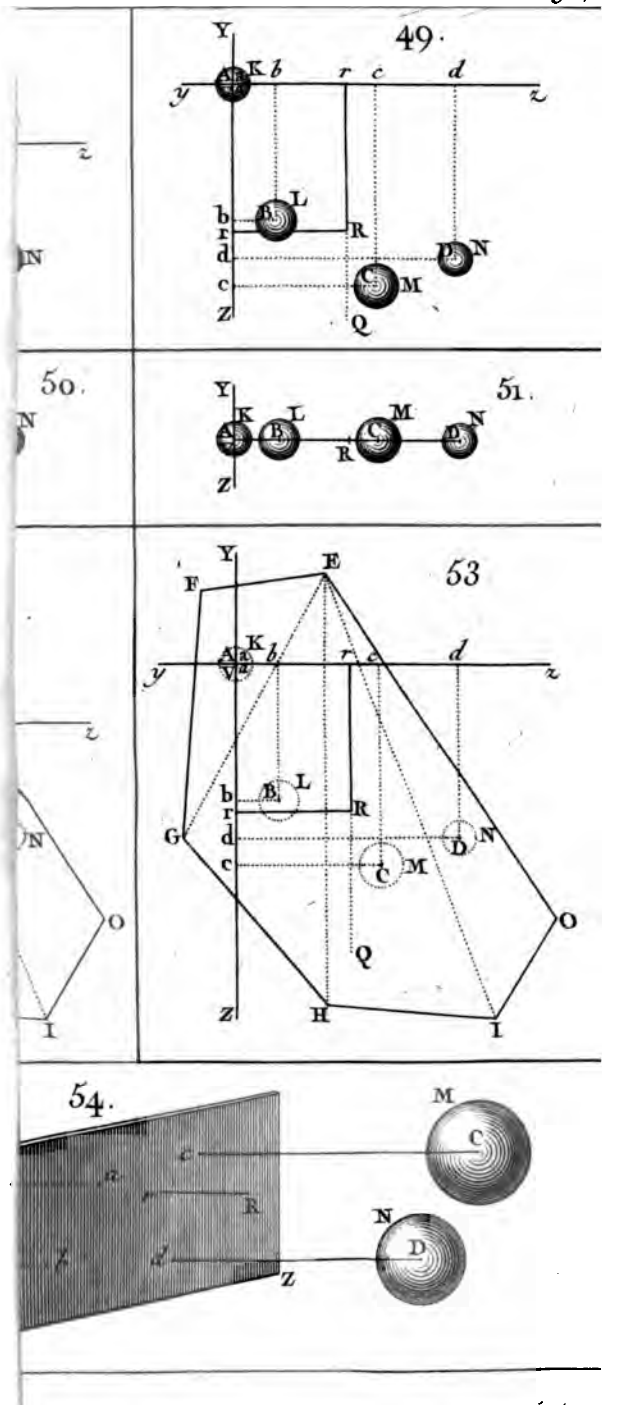
Ainsi connoissant le point *r* du plan *YZ*, & la droite *Rr* comprise entre ce point & le centre de gravité du système des corps *K, L, M, N*, le centre de gravité de ce système sera déterminé.

Comme la démonstration de cette opération est facile à déduire de la théorie des centres de gravité des corps situés dans un même plan, & que d'ailleurs on ne fera point usage de cette remarque dans la suite de ce Traité, il est inutile d'y insister davantage.




31.
C
N
D
L
32.
E
A
K
F
C
L
33.
M
D
A
K
E
G
C
B
L
N
F
F
E
D
35.
A
F
K
L
B
E
G
I
N
M
H
C
D
C
L
37.
A
F
I
C
K
L
Y
39.
F
C
H
L
B
G
E
A
F
I
C
K
D
L
H
Z


40.
G
M
H
N
41.
Y
a
K
f
F
O
e
b
L
G
M
g
c
h
H
r
R
Q
q
N
d
D
P
i
Z
43.
Y
N
D
M
O
P
K
L
N
D
M
r
R
Z
45.
Y
K
O
E
e
b
L
M
c
M
r
R
N
N
d
D
P
i
Z
47
Y
N
D
M
O
E
P
K
L
N
D
M
R
Z


49.
50.
51.
53
54.
Y
y
z
Z
A
K
b
r
c
d
B
L
R
D
N
C
M
Q
E
F
G
H
I
O
V

CHAPITRE V.

Des momens & des centres de gravité des arcs & de différentes portions de cercles ; de ceux des parties de la surface, & de la solidité de la sphère.

75. ON a vû dans le Chapitre II. que le centre de gravité de la circonférence & de la surface du cercle est à son centre propre, c'est-à-dire au milieu de son diamètre ; que celui de la surface & de la solidité de la sphère est pareillement au milieu de son diamètre.

On a aussi démontré dans le même Chapitre (*n°*. 33) que le centre de gravité de la surface convexe d'un segment, produite par un arc *AB* dans sa révolution sur un rayon *BC*, ou sur son sinus verse *BE*, est au milieu *P* de ce sinus verse qui devient la flèche du segment ; & que le centre de gravité d'une zone sphérique décrite par un arc *AM* dans sa révolution autour d'un rayon *BC* qui ne passe point par une extrémité de cet arc, est au milieu de la partie *EF* de ce rayon, qui devient la hauteur de la zone & qui est comprise entre deux cordes *AD*, *MN* menées par les extrémités de l'arc *AM* perpendiculairement sur ce rayon *BC* : ainsi il ne sera point question dans ce Chapitre de chercher les centres de gravité de toutes ces figures. Fig. 55.

Si l'on mène un rayon *CB* au milieu d'un arc de cercle *ABD*, les deux parties *AB*, *DB* de cet arc seront égales, semblables & symmétriquement placées

par rapport au rayon *CB*; ainſi le centre de gravité commun de ces deux parties, c'eſt-à-dire celui de l'arc entier *ABD*, ſera dans le rayon *CB*.

L'aire d'un ſegment *BAEDB* ou d'un ſecteur *BACDB* étant auſſi compoſée de deux parties égales, ſemblables; & ſemblablement diſpoſées par rapport au rayon *CB* qui diviſe l'arc ou la corde de ce ſegment ou ſecteur ou deux parties égales; il eſt encore évident que le centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur, eſt auſſi dans le rayon *CB* tiré par le milieu de ſon arc ou de ſa corde.

En faiſant tourner le ſecteur de cercle *ACB* autour du rayon *CB*, ce ſecteur produira dans ſon mouvement le ſolide d'un ſecteur ſphérique; & le demi-ſegment *ABE* engendrera le ſolide d'un ſegment ſphérique. Or tous ces ſolides étant compoſés de parties égales ſymmétriquement placées autour de l'axe *CB*, ils auront évidemment leurs centres de gravité dans cet axe ou rayon *CB*.

Mais pour déterminer le centre de gravité d'un arc, d'un ſegment ou d'un ſecteur de cercle ou de ſphère, ce n'eſt pas aſſez d'avoir fait voir qu'il eſt dans un rayon *CB* qui diviſe l'arc ou la corde de cette figure en deux parties égales; il reſte encore à trouver quel eſt le point de ce rayon qu'on doit regarder comme le centre de gravité, ou à chercher quelque autre ligne droite dans laquelle le même centre de gravité ſoit encore ſitué.

THÉOREME.

Fig. 16. 76. *Soit un demi-cercle touché par une droite* EF *parallèle à ſon diamètre* AD *& terminée par deux perpendiculaires* AE, DF *aux extrémités de ce diamètre;*

en sorte que la tangente E F *soit égale au diamètre. Si l'on divise la demi-circonférence* A B D *&* *la tangente* E F *en parties correspondantes, par des droites* T L, B C, Y R, Z S *quelconques perpendiculaires au diamètre* A D, *& que l'on considère les momens par rapport à ce diamètre; le moment de la demi-circonférence entière* A B D, *& ceux de ses parties* A G, A B, A I, G B, G I, G K, &c. *seront égaux au moment de la tangente* E F, *& à ceux de ses parties correspondantes* E T, E B, E Y, T B, T Y, T Z, &c.

DÉMONSTRATION.

Imaginons que la demi-circonférence *A B D* & la tangente *E F* sont encore divisées en une infinité de petites parties, par des perpendiculaires telles que *T L*, *X N* menées vers le diamètre *A D*, ou vers la tangente *E F*. On va d'abord prouver qu'en considérant les momens par rapport au diamètre *A D*, le moment de chaque petite partie *G H* de la demi-circonférence est égal au moment de la petite partie correspondante T X de la tangente.

L'arc *G H* étant supposé infiniment petit, peut être regardé comme une ligne droite; ainsi son milieu *O* doit être pris pour son centre de gravité. Menant par ce point *O* une droite *M O V* perpendiculaire au diamètre *A D* que l'on considère comme l'axe des momens; le moment du petit arc *G H* réuni à son centre de gravité *O*, sera représenté par $GH \times OM$, & le moment de la petite droite correspondante *T X* le sera par $TX \times VM$; ainsi il faut d'abord démontrer que $GH \times OM = TX \times VM$.

Soit tiré le rayon *O C*, & par l'extrémité *G* du petit arc *G H*, soit menée vers *X N* la perpendiculaire

GQ; le petit triangle GQH aura les côtés perpendiculaires sur ceux du triangle OMC: ainsi ces deux triangles GQH, OMC seront semblables & donneront $GH : GQ :: OC : OM$. d'où l'on tirera $GH \times OM = GQ \times OC$.

Mais $GQ = TX$, & le rayon OC ou $CB = VM$; ainsi $GQ \times OC = TX \times VM$.

Donc $GH \times OM = TX \times VM$, c'est-à-dire que le moment de chaque petite partie GH de la demi-circonférence ABD est égal au moment de la petite partie correspondante TX de la tangente: d'où il suit que

1°. La somme des momens de toutes les parties infiniment petites dont la demi-circonférence ABD est composée, est égale à la somme des momens de toutes les parties correspondantes contenues dans la tangente EF; & par conséquent le moment de la demi-circonférence ABD ou du système de toutes ses parties, est égal au moment de la tangente EF ou du système de toutes ses parties.

2°. Comme les parties finies AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c. de la demi-circonférence, & les parties correspondantes ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c. de la tangente EF, seront partagées dans un même nombre de parties infiniment petites, par le nombre infini de perpendiculaires qu'on a imaginé tirées vers le diamètre AD; la somme des momens de toutes les parties infiniment petites contenues dans les arcs AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c. sera égale à la somme des momens de toutes les parties infiniment petites contenues dans les parties correspondantes ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c. de la tangente; & par conséquent les momens des parties

AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c. de la demi-circonférence seront égaux aux momens des parties finies correspondantes *ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.* de la tangente *EF. Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

77. Supposons que *P, M, N, O, Q, V, X, &c.* sont les centres de gravité de la demi-circonférence *ABD*, & des arcs *AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c.* & que les poids de ces arcs sont réunis à leurs centres de gravité : si l'on mène des perpendiculaires *PC, Mm, Nn, Oo, Qq, VC, Xx, &c.* de ces centres de gravité vers l'axe ou diamètre *AD* par rapport auquel on considère les momens; les momens des arcs *ABD, AG, AB, AI, GB, GBI, GK* seront représentés par Fig. 57.

$ABD \times PC, AG \times Mm, AB \times Nn, AI \times Oo, GB \times Qq, GBI \times VC, GK \times Xx.$

Le moment de la tangente *EF*, & celui de chacune de ses parties *ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.* seront le produit de cette tangente, & ceux de ses parties multipliées par des perpendiculaires tirées de leurs centres de gravité ou milieux sur le diamètre *AD*; & comme chacune de ces perpendiculaires sera égale au rayon *BC* ou *AC*, les momens des lignes *EF, ET, EB, EY, TB, TY, TZ* seront représentés par

$EF \times BC, ET \times BC, EB \times BC, EY \times BC, TB \times BC, TY \times BC, TZ \times BC,$

ou par

$AD \times AC, AL \times AC, AC \times AC, AR \times AC, LC \times AC, LR \times AC, LS \times AC.$

Or puisque (n°. 76) le moment de la demi-circonférence *ABD*, & ceux de ses parties *AG, AB, AI,*

GB, GI, GK, &c. sont égaux à celui de la tangente *EF*, & à ceux de ses parties correspondantes *ET, EB, EY, TB, TY, TZ*, &c. on aura

$$\left.\begin{array}{l} ABD \times PC = AD \times AC = 2\overline{AC}^2 \\ AG \times Mm = AL \times AC \\ AB \times Nn = AC \times AC \text{ ou } \overline{AC}^2 \\ AI \times Oo = AR \times AC \\ GB \times Qq = LC \times AC \\ GI \times VC = LR \times AC \\ GK \times Xx = LS \times AC, \end{array}\right\} \text{\& par conséquent} \left\{\begin{array}{l} PC = \frac{AD \times AC}{ABD} = \frac{2\overline{AC}^2}{ABD} = \frac{\overline{AC}^2}{AB} \\ Mm = \frac{AL \times AC}{AG} \\ Nn = \frac{\overline{AC}^2}{AB} \\ Oo = \frac{AR \times AC}{AI} \\ Qq = \frac{LC \times AC}{GB} \\ VC = \frac{LR \times AC}{GBI} = \frac{GI \times AC}{GBI} \\ Xx = \frac{LS \times AC}{GK} \end{array}\right.$$

C'est-à-dire que 1°. la perpendiculaire *PC* ou *Nn* tirée du centre de gravité de la moitié ou du quart de la circonférence sur le diamètre *AD* ou sur le rayon *AC* qui termine cet arc, est égale au quarré du rayon divisé par le quart de la circonférence.

2°. Les perpendiculaires *Mm, Nn, Oo* menées des centres de gravité des arcs *AG, AB, AI* sur le rayon *AC* qui passe par une extrémité *A* de ces arcs, sont égales aux produits faits des sinus verses *AL, AC, AR* de ces arcs & du rayon *AC*, divisés par les longueurs des mêmes arcs.

3°. Les perpendiculaires *Qq, VC, Xx* tirées par les centres de gravité des arcs *GB, GI, GK* vers un diamètre quelconque *AD*, se trouvent en multipliant le rayon *AC* par les parties *LC, LR, LS* de ce diamètre, comprises entre les perpendiculaires tirées des extrémités de ces arcs sur le même diamètre, &

divisant ensuite ces produits par les longueurs des arcs *G B, G I, G K*.

4°. Et par conséquent la distance *VC* du centre de gravité d'un arc *GBI* au centre du cercle, ou la perpendiculaire *VC* tirée du centre de gravité *V* de cet arc sur un diamètre *AD* parallèle à la corde *GI* de cet arc, est égale au produit de sa corde *GI* & du rayon *AC*, divisé par la longueur *GBI* du même arc.

5°. Enfin la perpendiculaire *Qq* menée du centre de gravité *Q* d'un arc *GB* sur un rayon *AD* perpendiculaire à celui *BC* qui passe par une extrémité *B* de cet arc, est égale au produit du sinus *LC* de cet arc *GB* & du rayon *AC*, divisé par la longueur du même arc.

Corollaire II.

78. On a démontré (*Géom. n°.* 368) que les cordes *AG*, *AB*, *AI*, *&c.* qui partent de l'extrémité d'un diamètre *AD*, sont moyennes proportionnelles entre ce diamètre & ses parties *AL*, *AC*, *AR*, *&c.* comprises entre l'extrémité *A* d'où partent toutes ces cordes, & les perpendiculaires *GL*, *BC*, *IR*, *&c.* au diamètre *AB* par lesquelles toutes les cordes *AG*, *AB*, *AI*, *&c.* sont terminées. Fig. 58.

On aura donc $AL \times AD = \overline{AG}^2, AC \times AD = \overline{AB}^2, AR \times AD = \overline{AI}^2,$

ou........ $AL \times AC = \frac{1}{2}\overline{AG}^2, AC \times AC = \frac{1}{2}\overline{AB}^2, AR \times AC = \frac{1}{2}\overline{AI}^2.$

Ainsi puisque les momens des arcs	*AFG*,	*AGB*,	*ABI*
sont représentés par	$AFG \times Mm$,	$AGB \times Nn$,	$ABI \times Oo$;
ou par les produits	$AL \times AC$,	$AC \times AC$,	$AR \times AC$;
ils seront aussi représentés par	$\frac{1}{2}\overline{AG}^2$;	$\frac{1}{2}\overline{AB}^2$;	$\frac{1}{2}\overline{AI}^2$

c'est-à-dire qu'on aura $\left\{\begin{array}{l} AFG \times Mm = \frac{1}{2}\overline{AG}^2 \\ AGB \times Nn = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 \\ ABI \times Oo = \frac{1}{2}\overline{AI}^2 \end{array}\right\}$ & par conséquent $\left\{\begin{array}{l} Mm = \frac{\overline{AG}^2}{2AFG} \\ Nn = \frac{\overline{AB}^2}{2AGB} \\ Oo = \frac{\overline{AI}^2}{2ABI} \end{array}\right.$

Ainsi la perpendiculaire tirée du centre de gravité d'un arc sur le rayon qui passe par une extrémité du même arc, est égale au quarré de la corde de cet arc, divisé par le double de la longueur du même arc.

COROLLAIRE III.

Fig. 59 & 60. 79. Si la perpendiculaire Qq est tirée du centre de gravité Q d'un arc GIK sur un diamètre AD qui ne passe par aucune des deux extrémités de cet arc; on aura la valeur de cette perpendiculaire Qq, en multipliant la corde GK de l'arc par une perpendiculaire IR menée du milieu de cet arc sur le diamètre AD, & en divisant le produit par la longueur du même arc, c'est-à-dire qu'on aura $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$.

Car si par le milieu de l'arc GIK l'on tire le rayon IC, & qu'après avoir mené par les extrémités de cet arc des perpendiculaires GL, KS sur le diamètre AD, l'on tire encore par l'extrémité G du même arc une perpendiculaire GH sur KS; le triangle GHK aura les côtés perpendiculaires sur ceux du triangle IRC; ainsi ces deux triangles GHK, IRC seront semblables & donneront $GH : GK :: IR : IC$ & par conséquent $GH \times IC$ ou $LS \times AC = GK \times IR$. Mais on a trouvé (n°. 77) $GIK \times Qq = LS \times AC$. On aura donc aussi $GIK \times Qq = GK \times IR$; & $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$.

On doit remarquer que G I K × Q q *représente le moment de l'arc* G I K *par rapport au diamètre* A D, *& que ce moment est égal au produit* G K × I R *fait de la corde de l'arc multipliée par la perpendiculaire tirée du milieu de cet arc sur le diamètre par rapport auquel on considère le moment.*

REMARQUE.

80. Tout ce qu'on vient de démontrer au sujet des momens des arcs relativement à un diamètre *AD*, & de la distance du centre de gravité de ces arcs à ce diamètre, est vrai, non seulement lorsque ces arcs ne surpassent point la demi-circonférence, & dans le cas où ils sont entierement d'un côté du diamètre *AD*, mais encore dans le cas où ces arcs sont divisés par le diamètre relativement auquel on considère les momens, soit qu'ils surpassent ou qu'ils ne surpassent point la demi-circonférence. Cette remarque sera évidente, si l'on fait attention qu'en divisant la circonférence d'un cercle en deux arcs inégaux quelconques *AFG*, *AEG*, ces deux arcs auront des momens égaux relativement à chaque diamètre du cercle; ce qui est facile à prouver. Fig. 61.

On a démontré (*n°.* 63) que les momens de deux lignes regardées comme des poids proportionnels à l'étendue de ces lignes, sont égaux quand ils sont considérés relativement au centre de gravité de leur système, ou par rapport à un axe qui passe par ce centre de gravité. Or chaque diamètre du cercle passe par le centre de gravité de la circonférence, ou du système des deux arcs quelconques dans lesquels elle est divisée. Donc lorsque la circonférence d'un cercle sera divisée en deux arcs inégaux quelconques *AFG*,

AEG, les momens de ces deux arcs feront égaux par rapport à chaque diamètre du cercle.

Fig. 61. 1°. Si de deux points quelconques G, K de la demi-circonférence, l'on mène des perpendiculaires GL, KS fur un diamètre AD; on a vû (n°. 77) que les momens des arcs AFG, GIK feront égaux aux produits des parties correfpondantes AL, LS du diamètre AD, multipliées par le rayon CA; c'eft-à-dire que (en fuppofant que les points M, X font les centres de gravité des arcs AFG, GIK, & qu'on a tiré les perpendiculaires Mm, Xx fur le diamètre AD) l'on aura $AFG \times Mm = AL \times AC$, & $GIK \times Xx = LS \times AC$.

Donc fi l'on fuppofe que les points N, Y font les centres de gravité des autres parties AEG, GZK de la circonférence, & que l'on mène des perpendiculaires Nn, Yy vers le même diamètre AD; l'on aura auffi $AEG \times Nn = AL \times AC$, & $GZK \times Yy = LS \times AC$; & par conféquent $Nn = \frac{AL \times AC}{AEG}$, & $Yy = \frac{LS \times AC}{GZK}$: c'eft-à-dire que les momens des arcs AEG, GZK plus grands que la demi-circonférence, font égaux aux produits faits du rayon multiplié par les parties AL, LS du diamètre par rapport auquel on confidère les momens, comprifes entre des perpendiculaires tirées des extrémités de ces arcs fur ce diamètre; & que les perpendiculaires Nn, Yy tirées des centres de gravité N, Y de ces arcs fur le diamètre AD, font égales aux mêmes produits du rayon multiplié par les parties AL, LS du diamètre AD, divifés par les longueurs de ces arcs. On avoit démontré cette propofition pour les arcs moindres que la demi-circonférence & qui étoient entièrement d'un côté du diamètre.

2°. On

2°. On a encore démontré (n°. 78) que le moment d'un arc AFG qui part de l'extrémité du diamètre AD par rapport auquel on considère les momens, est égal à la moitié du quarré de sa corde AG; c'est-à-dire, que $AFG \times Mm = \frac{1}{2}\overline{AG}^2$. Ainsi puisque les momens des arcs AFG, AEG considérés par rapport à un même diamètre AD sont égaux, l'on aura aussi $AEG \times Nn = \frac{1}{2}\overline{AG}^2$, & par conséquent $Nn = \frac{\overline{AG}^2}{2AEG}$.

C'est-à-dire que le moment d'un arc plus grand que la demi-circonférence qui part d'une extrémité du diamètre AD relativement auquel on considère les momens, est égal à la moitié du quarré de sa corde; & que la perpendiculaire Nn menée du centre de gravité de cet arc sur le même diamètre, est égale au quarré de la corde de cet arc, divisé par le double de la longueur du même arc. On avoit démontré cette proposition pour les arcs moindres que la demi-circonférence.

3°. On a encore démontré que le moment d'un arc GIK relativement au diamètre AD qui ne passe par aucune extrémité de cet arc, est égal au produit de sa corde GK multipliée par la perpendiculaire IR menée du milieu de cet arc sur le diamètre AD; c'est-à-dire que si le point X est le centre de gravité de l'arc GIK, l'on aura $GIK \times Xx = GK \times IR$. On aura donc aussi $GZK \times Yy = GK \times IR = GK \times ZT$, & par conséquent $Yy = \frac{GK \times IR}{GZK} = \frac{GK \times ZT}{GZK}$.

C'est-à-dire que le moment d'un arc GZK plus grand que la demi-circonférence, est égal au produit fait de la corde de cet arc & de la perpendiculaire

menée du milieu du même arc sur le diamètre du moment; & que la perpendiculaire *Yy* tirée du centre de gravité de cet arc sur le même diamètre *AD*, est égale au même produit de la corde *GK* & de la perpendiculaire *IR* ou *ZT*, divisé par la longueur de l'arc.

Fig. 62. 4°. On a vû (*n°.* 64) que deux poids ou deux arcs *AK*, *AG* qu'on peut regarder comme deux poids proportionnels à l'étendue de ces arcs, étant placés des deux côtés d'un axe *AD* par rapport auquel on considère les momens, la différence des momens particuliers de ces deux arcs est égale au moment de leur systême ou de l'arc entier *GAK*.

Or (*n°.* 77) si des extrémités *K*, *G* des deux arcs *AK*, *AG*, l'on mène des perpendiculaires *KS*, *GL* sur l'axe ou diamètre *AD*, le moment de l'arc *AK* sera représenté par $AS \times AC$; celui de l'arc *AG* sera exprimé par $AL \times AC$; & la différence des momens des deux arcs *AK*, *AG* sera représentée par $AS \times AC - AL \times AC = (AS - AL) \times AC = LS \times AC$.

Ainsi en supposant que le point *X* est le centre de gravité de l'arc *GAK*, & que le moment de cet arc est par conséquent exprimé par $GAK \times Xx$, on aura $GAK \times Xx = LS \times AC$, & $Xx = \frac{LS \times AC}{GAK}$.

C'est-à-dire que le moment d'un arc *GAK* par rapport au diamètre *AD* qui coupe cet arc, est égal au produit du rayon *AC* & de la partie *LS* du diamètre comprise entre les perpendiculaires *GL*, *KS* tirées de l'extrémité de l'arc *GAK* sur le diamètre; & que la perpendiculaire *Xx* tirée du centre de gravité *X* de l'arc *GAK* sur le diamètre *AD* qui coupe cet arc, est égale au produit du rayon *AC* &

de la partie LS du diamètre, divisé par la longueur de l'arc GAK.

5°. Si par le milieu I de l'arc GAK l'on tire un rayon IC & une perpendiculaire IR sur le diamètre AD, & que par l'extrémité G du même arc on mène une perpendiculaire GH sur le prolongement de la droite KS tirée perpendiculairement au diamètre AD, les côtés du triangle GHK seront perpendiculaires sur ceux du triangle IRC : ainsi ces deux triangles GHK, IRC seront semblables, & donneront GH ou $LS : GK :: IR : IC$ ou AC; d'où l'on tirera $LS \times AC = GK \times IR$: & comme on vient de trouver $GAK \times Xx = LS \times AC$, on aura aussi $GAK \times Xx = GK \times IR$, & $Xx = \frac{GK \times IR}{GAK}$. Fig. 62.

C'est-à-dire que le moment d'un arc GAK coupé en deux parties quelconques AK, AG par un diamètre AD considéré comme axe de ce moment, est égal au produit de sa corde GK & d'une perpendiculaire IR tirée du milieu de cet arc sur le diamètre AD; & que la perpendiculaire Xx tirée du centre de gravité X de l'arc GAK sur le diamètre AD, est égale au même produit divisé par la longueur de cet arc.

6°. Comme le moment de l'arc GIK & celui de l'arc GZK sont égaux, le moment de l'arc GZK sera aussi représenté par $LS \times AC$, ou par $KG \times IR = KG \times ZT$. Ainsi supposant que Y est le centre de gravité de l'arc GZK, & tirant Yy perpendiculairement sur le diamètre AD, l'on aura $GZK \times Yy = LS \times AC$, & $GZK \times Yy = GK \times ZT$; d'où l'on tirera $Yy = \frac{LS \times AC}{GZK}$, & $Yy = \frac{GK \times ZT}{GZK}$.

Donc en général le moment d'un arc plus petit ou plus grand que la demi-circonférence, eſt dans tous les cas repréſenté par le produit du rayon & de la partie du diamètre par rapport auquel on conſidère ce moment, compriſe entre deux perpendiculaires tirées des extrémités de cet arc ſur ce diamètre. Le moment du même arc eſt encore égal au produit de la corde de cet arc & de la perpendiculaire tirée du milieu du même arc ſur le diamètre que l'on regarde comme l'axe du moment.

Enfin la perpendiculaire tirée du centre de gravité d'un arc quelconque ſur un diamètre, eſt dans tous les cas égale au produit qui ſert de moment à cet arc par rapport à ce diamètre, diviſé par la longueur de cet arc.

PROBLEME.

81. *Trouver le centre de gravité d'un arc dont on connoît le rayon & le nombre de degrés.*

SOLUTION.

Comme le principal objet de ce Problème eſt de faire l'application des principes qu'on a établis depuis le commencement de ce Chapitre, on ſe contentera de le réſoudre dans quelques exemples où l'on ſuppoſera que le diamètre eſt à la circonférence, ou que le demi-diamètre eſt à la demi-circonférence, comme 7 eſt à 22; en ſorte que dans un cercle dont AC ſera le rayon, l'on prendra $\frac{22}{7} AC$ pour la demi-circonférence, $\frac{11}{7} AC$ pour le quart de la circonférence, $\frac{44}{21} AC$ pour le tiers de la circonférence, $\frac{22}{21} AC$ pour la ſixième partie de la circonférence, & ainſi des autres arcs.

I.

82. *On demande le centre de gravité* P *d'une demi-circonférence* A B D. Fig. 56.

Ayant divisé la demi-circonférence ABD en deux parties égales par un rayon CB, le centre de gravité P qu'on demande sera dans ce rayon (*n*° 75) Voici comme on le déterminera.

On a trouvé (*n*°. 77) $CP = \frac{\overline{AC}^2}{AB}$. Mais le quart de circonférence $AB = \frac{11}{7} AC$. On aura donc $CP = \frac{\overline{AC}^2}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} AC$. C'est-à-dire qu'en prenant sur le rayon CB qui divise la demi-circonférence en deux parties égales, une partie CP égale aux $\frac{7}{11}$ du rayon, le point P sera le centre de gravité demandé.

II.

83. *On demande le centre de gravité du quart de circonférence* G I K. Fig. 60.

On peut déterminer ce centre de gravité de deux manières principales.

1°. Ayant divisé le quart de circonférence GIK en deux parties égales par un rayon CI, le centre de gravité Q qu'on demande sera placé dans ce rayon, & l'on aura (*n*°. 77) $CQ = \frac{GK \times AC}{GIK}$. Mais (*n*°. 81) $GIK = \frac{11}{7} AC$. On aura donc $CQ = \frac{GK \times AC}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} GK$. C'est-à-dire que le centre de gravité Q d'un arc GIK de 90 degrés est éloigné du centre C du cercle, d'une quantité égale aux $\frac{7}{11}$ de la cordé de cet arc.

Fig. 58. 2°. On peut encore trouver le centre de gravité N d'un arc AGB de 90 degrés, en déterminant les diſtances Nn, NP de ce centre de gravité aux deux rayons AC, BC qui terminent cet arc. Car (n°. 77) ayant trouvé $Nn = \frac{\overline{AC}^2}{AGB}$, & (n°. 81) $AGB = \frac{11}{7} AC$, on aura $Nn = \frac{\overline{AC}^2}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} AC$. C'eſt-à-dire que la diſtance Nn du centre de gravité d'un arc de 90 degrés au rayon AC qui termine cet arc, eſt égale à ſept fois la onziéme partie du rayon ; & comme il eſt évident que ce centre de gravité eſt éloigné du rayon BC de la même quantité, ou que $NP = Cn$, il eſt clair que ſi l'on prend ſur le rayon AC une partie $Cn = \frac{7}{11} AC$, & que par le point n on élève ſur ce rayon une perpendiculaire $nN = \frac{7}{11} AC$, l'extrémité N de cette perpendiculaire ſera le centre de gravité qu'on demande.

III.

Fig. 57. 84. *On demande le centre de gravité d'un arc de 60 degrés.*

On va déterminer le centre de gravité qu'on demande, de trois manières.

1°. Si l'arc GBI qu'on ſuppoſe de 60 degrés, & dont la corde GI eſt par conſéquent égale au rayon AC, eſt diviſé en deux parties égales par un rayon BC ; le centre de gravité V de cet arc ſera placé dans le rayon BC, de manière que l'on aura (n°. 77) $VC = \frac{GI \times AC}{GBI}$. Mais l'arc GBI étant de 60 degrés, on aura (n°. 81) $GBI = \frac{22}{21} AC$, & $GI = AC$.

On aura donc $VC = \frac{AC \times AC}{\frac{22}{21} AC} = \frac{21}{22} AC$. C'est-à-dire que le centre de gravité d'un arc GBI de 60 degrés est éloigné du centre du cercle d'une quantité égale à vingt-une fois la vingt-deuxième partie du rayon, ce qui fixe la position du centre de gravité V demandé.

2°. On peut déterminer la situation du centre de gravité M d'un arc AFG de 60 degrés, dans le rayon CF qui divise cet arc en deux parties égales, en cherchant la distance Mm de ce centre de gravité au rayon CA qui passe par une extrémité de cet arc. Fig. 58.

On a trouvé (nº. 78) $Mm = \frac{\overline{AG}^2}{2AFG}$. Mais dans le cas présent l'arc $AFG = \frac{22}{21} AC$, & la corde $AG = AC$. On aura donc $Mm = \frac{\overline{AC}^2}{2 \times \frac{22}{21} AC} = \frac{21}{44} AC$. Ainsi prenant sur le rayon CB perpendiculaire à celui qui passe par l'extrémité de l'arc proposé, une partie $CY = \frac{21}{44} AC$, & menant par le point Y une parallèle YM au rayon AC, le point M où cette parallèle rencontrera le rayon CF qui divise l'arc AFG en deux parties égales, sera le centre de gravité de l'arc AFG.

3°. On trouvera encore le centre de gravité Q d'un arc GIB de 60 degrés dans le rayon CI qui divise cet arc en deux parties égales, en cherchant la distance Qq de ce centre au rayon AC perpendiculaire à celui BC qui passe par une extrémité de l'arc GIB. Fig. 59.

On a trouvé (nº. 79) $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$ ou $\frac{GB \times IR}{GIB}$. Mais puisque l'arc GIB est de 60 degrés, on aura $GIB = \frac{22}{21} AC$; $GB = AC$. On aura donc

$Qq = \frac{AC \times IR}{\frac{22}{21} AC} = \frac{21}{22} IR$. Ainsi prenant sur le rayon CB une partie $CY = \frac{21}{22} IR$, c'est-à-dire égale à vingt-une fois la vingt-deuxième partie de IR cosinus de 30 degrés relativement au rayon CA, & menant YQ parallèle à CA; le point Q où cette parallèle rencontrera le rayon CI qui divise l'arc GIB en deux parties égales, sera le centre de gravité de cet arc.

Si l'on vouloit avoir la longueur de la perpendiculaire Qq en parties du rayon AC, on remarqueroit que l'arc AI est de 60 degrés, & que la perpendiculaire IR menée sur le rayon AC divise par conséquent ce rayon en deux parties égales. Ainsi l'on aura IR ou $\sqrt{\overline{IC}^2 - \overline{CR}^2} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AC}^2} = AC \times \sqrt{\frac{3}{4}}$; en sorte qu'au lieu de $Qq = \frac{21}{22} IR$, on auroit $Qq = \frac{21}{22} AC \times \sqrt{\frac{3}{4}}$: & si l'on prenoit $\frac{26}{15}$ pour $\sqrt{3}$ qui en differe très-peu, on trouveroit $Qq = \frac{21}{22} AC \times \frac{26}{30}$ ou $Qq = \frac{91}{110} AC$.

Fig. 59. 4°. Enfin si l'on a trouvé, comme dans les deux articles précédens, les deux distances du centre de gravité Q aux deux rayons BC, AC qui comprennent un angle droit, & dont l'un passe par une extrémité de l'arc proposé GB; on déterminera encore le centre de gravité G de cet arc, en prenant sur le rayon AC une partie Cq égale à la distance du centre de gravité Q à l'autre rayon BC, & en élevant par le point q sur ce rayon AC une perpendiculaire qQ égale à la distance qui doit être entre le même centre de gravité & le rayon AC.

THÉOREME.

Fig. 63. 85. *Le centre de gravité* P *d'un secteur de cercle*

MCN est placé dans le rayon CO qui divise ce secteur en deux parties égales, de manière que $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$.
Et si l'on abaisse une perpendiculaire PR sur le rayon latéral CN, on aura $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$.

DÉMONSTRATION.

On a prouvé (*n°.* 75) que le centre de gravité *P* d'un secteur de cercle *MCN* est dans le rayon *CO* qui divise ce secteur en deux parties égales; il reste donc seulement à démontrer que $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$ & $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$.

Imaginons le secteur *MCN* partagé par des rayons en une infinité de petits secteurs égaux. Ces petits secteurs pourront être regardés comme des triangles qui ayant leurs sommets réunis au centre *C*, & leurs bases dans l'arc *MON*, auront tous le rayon du secteur pour hauteur. Chacun de ces petits triangles, par exemple le petit triangle *MCL* aura son centre de gravité *K* dans le rayon *CI* qui partagera sa base en deux parties égales, & l'on trouvera (*n°.* 35) $CK = \frac{2}{3}CI$; en sorte que si du point *C* comme centre, & d'un rayon *CK* ou $CB = \frac{2}{3}CI$ ou $\frac{2}{3}CO$, l'on décrit un arc *ABD*, cet arc contiendra les centres de gravité particuliers de tous les petits triangles dans lesquels le secteur *MCN* aura été partagé.

Comme tous les petits triangles dans lesquels on imagine que le secteur *MCN* est partagé, sont supposés égaux, ils contiendront des parties égales de l'arc

A B D; ainſi les centres de gravité particuliers *K*, *K*, *K*, &c. où l'on doit ſuppoſer que les poids égaux de tous ces petits triangles ſont réunis, ſeront uniformément diſtribués ſur l'arc *A B D*.

On pourra donc conſidérer l'arc *A B D* comme la ſeule choſe peſante dans le ſecteur *MCN*, & regarder le centre de gravité *P* de cet arc uniformément chargé, comme le centre de gravité de ce ſecteur.

Les deux arcs concentriques *A B D*. *M O N* étant ſemblables, leurs centres de gravité *P*, *Q* ſeront ſemblablement placés dans leurs rayons *CB*, *CO* qui les diviſent en deux parties égales, & par rapport à leurs rayons latéraux *CD*, *CN*; c'eſt-à-dire que l'on aura $CP : CQ :: CB : CO$: & ſi l'on tire les perpendiculaires *PR*, *QS* ſur les rayons latéraux *CD*, *CN*, on aura auſſi $PR : QS :: CD : CN :: CB : CO$. Or puiſque l'on a fait $CB = \frac{2}{3} CO$, on aura auſſi $CP = \frac{2}{3} CQ$, & $PR = \frac{2}{3} QS$.

Mais (*n°.* 77) $CQ = \frac{MN \times CO}{MON}$.

& (*n°.* 78) $QS = \frac{\overline{MN}^2}{2\,MON}$.

Donc on aura $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$,

& $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 63. 86. Donc 1°. le moment d'un ſecteur *M C N* par rapport à ſon centre *C*, eſt égal à $\frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2$, c'eſt-à-dire un tiers du ſolide fait de ſa corde multipliée par le quarré de ſon rayon *CO*.

2°. Le moment du même secteur relativement à son rayon latéral CN, est égal à $\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$, c'est-à-dire à la sixième partie du solide fait du quarré de sa corde multiplié par son rayon.

Car pour avoir le moment du secteur MCN relativement à son centre C, & par rapport à son rayon latéral CN, il faut multiplier l'aire de ce secteur, savoir, $\frac{1}{2}MON \times CO$, par les distances CP & PR, ou $\frac{2MN \times CO}{3MON}$ & $\frac{\overline{MN}^2}{3MON}$, du centre de gravité de ce secteur à son centre C & à son rayon latéral CN; ce qui produira pour ces deux momens

$$\frac{1}{2}MON \times CO \times \frac{2MN \times CO}{3MON}, \& \frac{1}{2}MON \times CO \times \frac{\overline{MN}^2}{3MON},$$

qu'on réduira aisément à $\frac{1}{3}MN \times \overline{CO}^2$, & $\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$.

COROLLAIRE II.

87. On a démontré (n°. 63) que les momens de deux surfaces regardées comme des poids proportionnels à leurs étendues, sont égaux quand on les considère par rapport au centre de gravité de leur système, ou par rapport à un axe qui passe par ce centre de gravité. Or le centre C du cercle est le centre de gravité du cercle entier, ou du système des deux secteurs $OMCNO$, $EMCNE$ qui composent le cercle; ainsi les momens des deux secteurs $OMCNO$, $EMCNE$ considérés par rapport au centre C ou relativement au diamètre NH, sont égaux. Fig. 63.

Mais on vient de prouver que le moment du secteur $OMCNO$ considéré par rapport au centre C, est égal à $\frac{1}{3}MN \times \overline{CO}^2$, & que le moment du même

secteur relativement au rayon latéral CN, ou par rapport au diamètre NH, est égal à $\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$.

Donc, en supposant que le point T est le centre de gravité du secteur $EMCNE$, que TV est perpendiculaire sur le diamètre NCH, & que les produits $EMCNE \times CT$, $EMCNE \times TV$ sont par conséquent les momens du secteur $EMCNE$ par rapport au centre C & relativement au diamètre NCH, on aura $EMCNE \times CT = \frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2$, & $EMCNE \times TV = \frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$.

Or le secteur $EMCNE = \frac{1}{2} MEN \times CO$. Ainsi en divisant par cette égalité les deux momens qu'on vient de trouver pour le secteur $EMCNE$, l'on aura $CT = \frac{\frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2}{\frac{1}{2} MEN \times CO}$, & $TV = \frac{\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO}{\frac{1}{2} MEN \times CO}$, ou $CT = \frac{2\, MN \times CO}{3\, MEN}$, & $TV = \frac{\overline{MN}^2}{3\, MEN}$.

C'est-à-dire que dans un secteur $EMCNE$ plus grand que le demi-cercle, ainsi que dans un secteur $OMCNO$ moindre que le demi-cercle, la distance du centre de gravité au centre du cercle, est égale aux deux tiers du produit de la corde & du rayon, divisé par la longueur de l'arc ; & que la distance du même centre de gravité à un rayon latéral du secteur ou à son prolongement, est égale au tiers du quarré de la corde, divisé par la longueur de l'arc.

COROLLAIRE III.

Fig. 63. 88. En prenant, comme on a déjà fait, $\frac{22}{7} EO$ pour la circonférence, $\frac{22}{7} CO$ pour la demi-circonférence, $\frac{11}{7} CO$ pour le quart de circonférence,

$\frac{22}{21} CO$ pour la longueur d'un arc de 60 degrés, & ainsi des autres :

Si l'arc MON est de 90 degrés, c'est-à-dire si $MON = \frac{11}{7} CO$, ou $MEN = \frac{33}{7} CO$;

au lieu d'avoir
$$\left\{\begin{aligned} CP &= \frac{2MN \times CO}{3MON} \\ PR &= \frac{\overline{MN}^2}{3MON} \\ CT &= \frac{2MN \times CO}{3MEN} \\ TV &= \frac{\overline{MN}^2}{3MEN} \end{aligned}\right\}$$
on aura
$$\left\{\begin{aligned} CP &= \frac{2MN \times CO}{\frac{33}{7} CO} = \frac{14}{33} MN \\ PR &= \frac{\overline{MN}^2}{\frac{33}{7} CO} = \frac{2\overline{CO}^2}{\frac{33}{7} CO} = \frac{14}{33} CO \\ CT &= \frac{2MN \times CO}{\frac{99}{7} CO} = \frac{14}{99} MN \\ TV &= \frac{\overline{MN}^2}{\frac{99}{7} CO} = \frac{2\overline{CO}^2}{\frac{99}{7} CO} = \frac{14}{99} CO. \end{aligned}\right.$$

Si le secteur $OMCNO$ devient un demi-cercle $MHNM$, c'est-à-dire si l'arc MON devient une demi-circonférence, ou égal à $\frac{22}{7} CO$, sa corde MN deviendra égale au diamètre $NH = 2\,CO$; & supposant que le point G pris sur le rayon CM qui divise le demi-cercle en deux parties égales, est le centre de gravité de ce demi-cercle, au lieu des équations $CP = \frac{2MN \times CO}{3MON}$; $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3MON}$, on trouvera d'abord $CG = \frac{4CO \times CO}{3NMH}$; & mettant $\frac{22}{7} CO$ pour NMH, on aura $CG = \frac{4CO \times CO}{\frac{66}{7} CO} = \frac{14}{33} CO$.

C'est-à-dire que le centre de gravité de la surface d'un demi-cercle est éloigné du centre, d'une quantité égale à quatorze fois la trente-troisième partie du rayon.

Si le secteur $OMCNO$ n'étoit que la sixième partie de son cercle, c'est-à-dire si l'arc MON étoit de 60 degrés, on auroit $MON = \frac{22}{21} CO$, & $MN = CO$;

ainsi au lieu de $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$, & $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$,

on auroit $CP = \frac{2\,CO \times CO}{\frac{66}{21}\,CO} = \frac{42}{66}\,CO = \frac{7}{11}\,CO$.

& $PR = \frac{\overline{CO}^2}{\frac{66}{21}\,CO} = \frac{7}{22}\,CO$. Et ainsi des autres secteurs.

THÉOREME.

Fig. 64 & 65. 89. *La distance* CQ *du centre de gravité* Q *d'un segment de cercle* OMDNO *au centre* C *du cercle, est égale à deux fois le tiers du cube de la moitié de la corde de ce segment, divisé par l'aire du même segment; c'est-à-dire que* $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$.

Démonstration.

Supposons que les trois points *P*, *Q*, *V* pris dans le rayon *CO* qui divise le secteur *OMCNO*, le segment *OMDNO*, & le triangle *CMDNC* en deux parties égales, sont les centres de gravité de ce secteur, de ce segment & de ce triangle.

Si l'on considère les momens des surfaces de ces trois figures relativement au centre *C*, ou par rapport à un diamètre perpendiculaire au rayon *CO*, $\frac{1}{3}MN \times \overline{CO}^2$ sera le moment du secteur *OMCNO* (n°. 86); $\frac{MN \times CD}{2} \times CV$ ou $MN \times CD \times \frac{1}{3}CD$ ou $\frac{1}{3}MN \times \overline{CD}^2$ sera le moment du triangle *CMDNC*; enfin $OMDNO \times CQ$ sera le moment du segment *OMDNO*.

Mais le moment du segment *OMDNO* est égal au moment du secteur *OMCNO* moins le moment du triangle *CMDNC*.

Ainsi $OMDNO \times CQ = \begin{cases} \frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2 - \frac{1}{3} MN \times \overline{CD}^2 \\ \text{ou } \frac{1}{3} MN \times (\overline{CO}^2 - \overline{CD}^2). \end{cases}$

Or $\overline{CO}^2 - \overline{CD}^2$ ou $\overline{CM}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{MD}^2$; & $\frac{1}{3} MN = \frac{2}{3} MD$.

Donc $OMDNO \times CQ = \frac{2}{3} MD \times \overline{MD}^2 = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$,

& par conséquent $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

90. Le centre *C* du cercle étant le centre de gravité du système des deux segmens *OMDNO*, *EMDNE* qui composent la surface du cercle, ces deux segmens auront des momens égaux relativement à ce centre ; c'est-à-dire que si les points *Q*, *T* sont les centres de gravité des deux segmens *OMDNO*, *EMDNE*, l'on aura Fig. 64 & 65.

$OMDNO \times CQ = EMDNE \times CT$: & comme on vient de trouver $OMDNO \times CQ = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$, on aura aussi $EMDNE \times CT = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$; & par conséquent $CT = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,EMDNE}$.

Ainsi le centre de gravité d'un segment plus grand ou plus petit que le demi-cercle, est éloigné du centre du cercle d'une quantité égale à deux fois le tiers du cube de la moitié de la corde de ce segment, divisé par l'aire du même segment.

COROLLAIRE. II,

91. Si du centre de gravité *Q* du segment *OMDNO*, l'on abaisse une perpendiculaire *QS* sur le diamètre *HN* qui passe par une extrémité de l'arc Fig. 64 & 65.

du ſegment $OMDNO$, les deux triangles rectangles CDN, CSQ qui auront un angle commun au centre C du cercle, ſeront ſemblables, & donneront $CN : ND$ ou $CN : MD :: CQ : QS$. Ainſi l'on aura $QS = \frac{CQ \times MD}{CN}$. Et comme on a trouvé (no. 89) $CQ = \frac{2\overline{MD}^3}{3OMDNO} = \frac{2\overline{MD}^2 \times MD}{3OMDNO}$; l'on aura $QS = \frac{2\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3OMDNO \times CN}$, & par conſéquent $OMDNO \times QS = \frac{2\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3CN}$.

COROLLAIRE III.

Fig. 65. 92. Si du point M extrémité de l'arc MON, l'on abaiſſe une perpendiculaire MF ſur le diamètre HN, la corde MN ſera moyenne proportionnelle entre le diamètre HN & ſa partie FN; ainſi l'on aura $\overline{MN}^2 = HN \times FN = 2CN \times FN$, & $\frac{\overline{MN}^2}{4}$ ou $\overline{MD}^2 = \frac{CN \times FN}{2}$; & par conſéquent $\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2 = \frac{\overline{CN}^2 \times \overline{FN}^2}{4}$, ou $\frac{2\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3CN} = \frac{CN \times \overline{FN}^2}{6}$.

Donc au lieu de $OMDNO \times QS = \frac{2\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3CN}$ qu'on a trouvé dans le Corollaire précédent, on aura $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$, & $QS = \frac{\overline{FN}^2 \times CN}{6OMDNO}$. C'eſt-à-dire que le moment du ſegment $OMDNO$ relativement au diamètre NH qui paſſe par une extrémité de l'arc de ce ſegment, eſt égal à la ſixième partie

partie du quarré du sinus verse FN de cet arc, multiplié par le rayon, &c.

Il suit de tout ce qui a été dit, que le moment du reste du cercle ou celui du segment $EMDNE$ relativement au diamètre NH, est aussi égal à $\frac{1}{6}\overline{FN}\times CN$.

Corollaire IV.

93. Si l'on suppose que le diamètre est à la circonférence comme 7 à 22, on aura le quarré du diamètre à la surface du cercle, ou le quarré du rayon qui n'est que le quart de celui du diamètre, à l'aire du quart de cercle comme 14 est à 11. Fig. 64.

Cela posé, si l'arc MON du segment est de 90 degrés, & que l'on veuille avoir la distance CQ du centre du cercle au centre de gravité du segment $OMDNO$, on substituera dans la formule (*n°*. 89) $CQ = \frac{2\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$, les valeurs convenables à MD & à $OMDNO$ dans le cas où l'arc MON est de 90 degrés.

Le triangle MDC étant rectangle en D, donne $\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2$. Mais dans le cas où l'arc MON est de 90 degrés, les deux angles DCM, DMC sont chacun de 45 degrés. On aura donc $MD = CD$ & $\overline{MD}^2 = \overline{CD}^2$, & par conséquent $\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MD}^2 = 2\,\overline{MD}^2$, & $\frac{\overline{CM}^2}{2} = \overline{MD}^2$ ou $\frac{CM}{\sqrt{2}} = MD$. Donc $\overline{CM}^2 \times \frac{CM}{\sqrt{2}} = 2\,\overline{MD}^2 \times MD$ ou $\frac{\overline{CM}^3}{\sqrt{2}} = 2\,\overline{MD}^3$.

Puisque $14 : 11 :: \overline{CM}^2 : OMCNO$, on aura $OMCNO = \frac{11}{14}\overline{CM}^2$; & puisque $MD = CD$, on aura $MD \times CD$ ou l'aire du triangle $CMDNC = \overline{MD}^2$ ou $\frac{1}{2}\overline{CM}^2$, & par conséquent $OMCNO - CMDNC$ ou l'aire du segment $OMDNO = \frac{11}{14}\overline{CM}^2 - \frac{1}{2}\overline{CM}^2 = \frac{2}{7}\overline{CM}^2$.

Donc dans le cas où l'arc MON sera de 90 degrés, la formule $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$ deviendra

$$CQ = \frac{\left(\frac{\overline{CM}^3}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{6}{7}\,\overline{CM}^2} = \frac{7\,CM}{6\sqrt{2}}.$$

Maintenant si pour $2 = \frac{288}{144}$ l'on prend $\frac{289}{144}$ qui n'en diffère que de la cent quarante-quatrième partie d'une unité, l'on aura $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$, & $6\sqrt{2} = \frac{17}{2}$. Alors au lieu de $CQ = \frac{7\,CM}{6\sqrt{2}}$, on aura

$$CQ = \frac{7\,CM}{\frac{17}{2}} = \frac{14}{17}\,CM.$$

L'arc MON étant toûjours supposé de 90 degrés, si l'on veut avoir la distance QS du centre de gravité du segment $OMDNO$ au diamètre HN qui passe par l'extrémité de l'arc de ce segment, il faudra substituer dans sa formule $QS = \frac{\overline{FN}^2 \times CN}{6\,OMDNO}$ les valeurs convenables à FN & à $OMDNO$ dans le cas proposé, ce qui sera très-facile.

Car on remarquera aisément que, dans le cas où l'arc MON sera de 90 degrés, la droite MF menée perpendiculairement au diamètre HN, se confondra

avec le rayon MC, & qu'on aura par conséquent $FN = CN$ & $\overline{FN}^2 \times CN = \overline{CN}^3$. Ainsi au lieu de $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$, on aura $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{CN}^3$, ou $QS = \frac{\overline{CN}^3}{6\,OMDNO}$.

Mais dans le cas où l'arc MON est de 90 degrés; on vient de voir que $OMDNO = \frac{2}{7}\overline{CM}^2$, ou $6\,OMDNO = \frac{12}{7}\overline{CM}^2 = \frac{12}{7}\overline{CN}^2$. On aura donc dans le même cas $QS = \frac{\overline{CN}^3}{\frac{12}{7}\overline{CN}^2} = \frac{7}{12}CN$.

THÉOREME.

94. *La perpendiculaire* PR *menée du centre de gravité* P *d'un demi-segment de cercle* OMFNO *sur le côté* FN *qui fait partie du diamètre, est égale au quarré de la partie* FN *du diamètre, multiplié par la somme* HF + CN *faite de l'autre partie du diamètre & du rayon, & divisé par six fois l'aire de ce demi-segment; c'est-à-dire que* $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\,OMFNO}$. Fig. 66.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la corde MN de l'arc du demi-segment: ce demi-segment sera composé d'un segment $OMDNO$ dont nous supposerons le centre de gravité placé en Q; & d'un triangle MFN dont V sera supposé le centre de gravité.

Si l'on considère le moment du segment $OMDNO$ & celui du triangle MFN relativement au diamètre HN, dont une partie sert de côté au demi-segment,

& que des centres de gravité Q, V de ces deux figures l'on mène des perpendiculaires QS, VT au diamètre HN; on aura le moment du segment $OMDNO$, savoir $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$ (n°. 92), & le moment du triangle MFN, savoir $MFN \times VT = FN \times \frac{1}{2} MF \times \frac{1}{3} MF = \frac{1}{6} FN \times \overline{MF}^2$.

Mais ces deux momens étant conspirans, leur somme est égale au moment de leur système ou du demi-segment $OMFNO$. Ainsi en supposant que P est le centre de gravité du demi segment $OMFNO$, & tirant PR perpendiculairement sur le diamètre HN, on aura $OMFNO \times PR = OMDNO \times QS + MFN \times VT$. Donc on aura aussi $OMFNO \times PR = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN + \frac{1}{6} FN \times \overline{MF}^2$. Mais $\overline{MF}^2 = FN \times HF$, & par conséquent $\frac{1}{6} FN \times \overline{MF}^2 = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times HF$. Donc enfin $OMFNO \times PR = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN + \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times HF = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times (HF + CN)$, & $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\, OMFNO}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 66. 95. On remarque que $HF = 2CN - FN$ & $HF + CN = 3CN - FN$, ou bien $\frac{HF + CN}{6} = \frac{CN - \frac{1}{3}FN}{2}$.

Ainsi au lieu de $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\, OMFNO}$, on aura $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN)}{2\, OMFNO}$.

COROLLAIRE II.

Fig. 66. 96. Si l'arc MON étoit de 60 degrés, on auroit

$FN = \frac{1}{2} CN$, & $CN - \frac{1}{3} FN = \frac{5}{6} CN$; ainsi $\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3} FN) = \frac{1}{4} \overline{CN}^2 \times \frac{5}{6} CN = \frac{5}{24} \overline{CN}^3$.

Supposant encore le quarré du diamètre à l'aire du cercle, ou le quarré du rayon à l'aire du quart de cercle, comme 14 est a 11, on auroit l'aire du quart de cercle égale à $\frac{11}{14} \overline{CN}^2$; & comme le secteur de 60 dégrés est les deux tiers du quart de cercle, on trouveroit le secteur $OMCNO = \frac{11}{21} \overline{CN}^2$.

L'arc MON étant de 60 degrés, on aura $CF = \frac{1}{2} CN$ ou $\overline{CF}^2 = \frac{1}{4} \overline{CN}^2$; & le triangle rectangle MFC donnant $\overline{MF}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CF}^2$ ou $\overline{CN}^2 - \overline{CF}^2$, on aura $\overline{MF}^2 = \overline{CN}^2 - \frac{1}{4} \overline{CN}^2 = \frac{3 \overline{CN}^2}{4}$, ou $MF = \frac{CN \times \sqrt{3}}{2}$. Mais le triangle $MFC = \frac{FC \times MF}{2}$. Ainsi $MFC = \frac{\frac{1}{2} CN \times \frac{1}{2} CN \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{CN}^2 \times \sqrt{3}}{8}$.

Or $OMFNO = OMCNO - MFC$. Donc $OMFNO = \frac{11}{21} \overline{CN}^2 - \frac{1}{8} \overline{CN}^2 \times \sqrt{3}$.

Enfin si au lieu de 3 ou de $\frac{675}{225}$ l'on prend $\frac{676}{225}$, $\frac{26}{15}$ sera la valeur de $\sqrt{3}$ à peu de chose près, & l'on aura $\frac{1}{8} \overline{CN}^2 \times \sqrt{3} = \frac{1}{8} \overline{CN}^2 \times \frac{26}{15} = \frac{13}{60} \overline{CN}^2$. Ainsi au lieu de $OMFNO = \frac{11}{21} \overline{CN}^2 - \frac{1}{8} \overline{CN}^2 \times \sqrt{3}$, l'on aura $OMFNO = \frac{11}{21} \overline{CN}^2 - \frac{13}{60} \overline{CN}^2 = \frac{43}{140} \overline{CN}^2$, ou $2 OMFNO = \frac{43}{70} \overline{CN}^2$.

Donc dans le cas où l'arc MON sera de 60 degrés, au lieu de $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3} FN)}{2 OMFNO}$;

on aura $PR = \frac{\frac{5}{24}\overline{CN}^3}{\frac{43}{70}\overline{CN}^2} = \frac{175}{516} CN.$

REMARQUE.

Fig. 66. 97. Si l'on prolonge le côté MF du demi-ſegment $OMFNO$, juſqu'à ce qu'il rencontre la demi-circonférence en un ſecond point m, on aura un ſecond demi-ſegment NFm entièrement ſemblable & égal au premier; enſorte que ſi p eſt le centre de gravité du nouveau demi-ſegment NFm, & qu'on joigne les centres de gravité des deux demi-ſegmens par une droite Pp, cette droite Pp ſera perpendiculaire au diamètre NH, & ſera coupée en deux parties égales par ce diamètre.

Le point R, où la perpendiculaire PR tirée du centre de gravité P du demi-ſegment $OMFNO$ ſur le diamètre NH rencontrera ce diamètre, ſera donc le centre de gravité du ſyſtème des deux demi-ſegmens $OMFNO$, NFm, ou du ſegment entier $NOMmN$.

Il ſuit de là que la perpendiculaire PX tirée du centre de gravité P du demi-ſegment $OMFNO$ ſur le diamètre IK parallèle au côté MF de ce demi-ſegment, eſt égale à la diſtance CR du centre du cercle au centre de gravité R du ſegment entier $NOMmN$.

Mais on a trouvé (*n*°. 89) que la diſtance du centre du cercle au centre de gravité d'un ſegment, eſt égale à deux fois le tiers du cube de la demi-corde de ce ſegment, diviſé par l'aire du même ſegment; c'eſt-à-dire que $CR = \frac{2\overline{MF}^3}{3NOMmN} = \frac{\overline{MF}^3}{3OMFN}$.

Ainſi pour déterminer la poſition du centre de

gravité P d'un demi-ſegment $OMFNO$, on prendra ſur le rayon CN une partie $CR = \frac{\overline{MF}^3}{3\,OMFNO}$, puis on élèvera par le point R ſur le même rayon une perpendiculaire $RP = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN)}{2\,OMFNO}$; & le point P ſera le centre de gravité du demi-ſegment $OMFNO$.

THÉOREME.

98. *Le centre de gravité* P *d'un ſecteur ſphérique eſt éloigné du centre* C *de la ſphère, d'une quantité égale aux trois huitièmes de ce qui reſte du diamètre, après en avoir retranché la flèche ou la hauteur* AE *de la calotte de ce ſecteur; c'eſt-à-dire que* $CP = \frac{3}{8}EF$. Fig. 67.

DÉMONSTRATION.

Imaginons le ſecteur ſphérique compoſé d'une infinité de petites pyramides égales qui ayent leurs ſommets au centre C de la ſphère, & leurs baſes dans la ſurface de la calotte qui ſert de baſe au ſecteur. Toutes ces petites pyramides ayant pour hauteur le rayon CA du ſecteur, le centre de gravité de chacune d'elles ſera éloigné du centre C de la ſphère, d'une quantité égale aux trois quarts du rayon; & par conſéquent ſi l'on imagine une nouvelle calotte MON dont le rayon $CO = \frac{3}{4}CA$, la ſurface convexe de cette calotte contiendra les centres de gravité de toutes les pyramides qui compoſeront le ſecteur ſphérique.

Comme toutes les petites pyramides dans leſquelles on imagine que le ſecteur eſt partagé, ſont ſuppoſées parfaitement égales en ſolidité & en peſanteur, elles

occuperont des parties égales dans la surface convexe de la calotte MON; ainsi les centres de gravité particuliers où les poids égaux de toutes les petites pyramides élémentaires sont réputés réunis, seront uniformément répandus sur la surface de la calotte MON.

La surface de la calotte MON uniformément chargée pourra donc être regardée comme la seule chose pesante dans le secteur sphérique, & le centre de gravité de cette calotte pourra être considéré comme celui de ce secteur. Mais (n°. 33.) le centre de gravité de la calotte MON est au milieu de sa flèche LO. Donc le centre de gravité P du secteur sphérique est aussi au milieu de cette flèche.

Les secteurs $OMCNO$, $ABCDA$ étant semblables, leurs flèches OL, AE seront proportionnelles à leurs rayons CO, CA; ainsi puisque (*constr.*) $CO = \frac{3}{4} CA = \frac{3}{8} AF$, on aura aussi $OL = \frac{3}{4} AE$, & $\frac{1}{2} OL$ ou $OP = \frac{3}{8} AE$. Donc $CO - OP$ ou $CP = \frac{3}{8} AF - \frac{3}{8} AE = \frac{3}{8} EF$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 68. 99. Lorsque le secteur sphérique sera une demi-sphère, ce qui arrivera lorsque la flèche deviendra égale au rayon, le reste FE du diamètre sera aussi égal au rayon. Dans ce cas on aura $CP = \frac{3}{8} CA$; c'est-à-dire que le centre de gravité d'une demi-sphère est éloigné de son centre, d'une quantité égale aux trois huitièmes du rayon.

COROLLAIRE II.

Fig. 67. 100. Si l'arc de grand cercle BAD, qui passe par

le ſommet de la calotte du ſecteur ſphèrique, étoit de 120 degrés, on auroit $CE = \frac{1}{2} CA$, & $FE = \frac{3}{2} CA$; ainſi au lieu de $CP = \frac{3}{8} FE$, on trouveroit $CP = \frac{9}{16} CA$.

REMARQUE.

101. Il faut remarquer que ſi l'on avoit cherché le centre de gravité Y du ſecteur ſphérique $CBFDC$, on auroit trouvé $CY = \frac{3}{8} AE$.

THÉOREME.

102. *Le centre de gravité* P *d'un ſegment ſphérique eſt éloigné du centre de la ſphère, d'une quantité* CP *égale au quart du quarré de la différence* EF *qu'il y a entre le diamètre de la ſphère & la flèche de ce ſegment, diviſé par le rayon de la ſphère moins le tiers de la flèche du ſegment.* Fig. 69.

DÉMONSTRATION.

Soient p le centre de gravité du ſecteur ſphérique engendré par la révolution du ſecteur circulaire ACB ſur ſon rayon latéral AC; Q le centre de gravité du cone droit engendré par la révolution du triangle rectangle BEC ſur le même rayon; & P le centre de gravité du ſegment ſphérique engendré par la révolution du demi-ſegment circulaire $AEBA$.

On a vû (*n*°. 98) que le centre de gravité p du ſecteur ſphérique eſt éloigné du centre C, d'une quantité $Cp = \frac{3}{8} FE$; ainſi en repréſentant le ſolide de ce ſecteur par ſon profil $ABCDA$, ſon moment relativement au centre C ſera $ABCDA \times \frac{3}{8} FE$.

Repréſentant auſſi le ſolide du cone droit par ſon profil triangulaire BCD, le moment de ce cone par

rapport au centre C, sera $BCD \times CQ$, ou $BCD \times \frac{3}{4} CE$;

Enfin nommant le solide du segment sphérique par les lettres du segment circulaire qui en est le profil, $ABDA \times CP$ sera le moment de ce segment sphérique relativement au même centre C.

Mais le moment du secteur $ABCDA$ est égal à la somme des momens de ses deux parties, c'est-à-dire du cone BCD & du segment $ABDA$. Ainsi en retranchant le moment du cone de celui du secteur, le reste sera le moment du segment : ce qui donnera cette égalité $ABDA \times CP = ABCDA \times \frac{3}{8} EF - BCD \times \frac{3}{4} EC$.

Mais $ABCDA = ABDA + BCD$, & par conséquent $ABCDA \times \frac{3}{8} EF = ABDA \times \frac{3}{8} EF + BCD \times \frac{3}{8} EF$.

Donc $ABDA \times CP = ABDA \times \frac{3}{8} EF + BCD \times (\frac{3}{8} EF - \frac{3}{4} EC)$.

Or $\frac{3}{8} EF - \frac{3}{4} EC = \frac{3}{8} EF - \frac{3}{8} EC - \frac{3}{8} EC = \frac{3}{8} CF - \frac{3}{8} EC = \frac{3}{8} AE$.

Ainsi $ABDA \times CP = ABDA \times \frac{3}{8} EF + BCD \times \frac{3}{8} AE$.

Et divisant chaque membre par le segment sphèrique $ABDA$, on aura $CP = \frac{3}{8} EF + \frac{BCD}{ABDA} \times \frac{3}{8} AE$.

Le solide du cone BCD est le produit de l'aire du cercle qui a BE pour rayon, & du tiers de CE; & le solide du segment $ABDA$ étant (*Géom. n°.* 497) égal à un cylindre qui a AE pour rayon & $CA - \frac{1}{3} AE$ pour hauteur, est le produit de l'aire du cercle dont AE est le rayon, & de $CA - \frac{1}{3} AE$.

Or {l'aire du cercle qui a AE pour rayon} : {l'aire du cercle qui a BE pour rayon} $:: \overline{AE}^2 : \overline{BE}^2$ ou (*Géom. n°.* 236) $:: AE : EF$;

parce que les trois lignes AE, BE, EF sont continuellement proportionnelles; &

$CA - \frac{1}{3} AE : \frac{1}{3} CE :: CA - \frac{1}{3} AE : \frac{1}{3} CE$.

Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura

L'aire du cercle qui a AE *pour rayon, multipliée par* $CA - \frac{1}{3}AE$, *c'est-à-dire le segment sphérique* ABDA.

Est à l'aire du cercle qui a BE *pour rayon, multiplié par* $\frac{1}{3}CE$, *c'est-à-dire au cone* BCD.

Comme $AE \times (CA - \frac{1}{3}AE)$,

Est à $EF \times \frac{1}{3}CE$.

Et par conséquent $\frac{BCD}{ABDA} = \frac{EF \times \frac{1}{3}CE}{AE \times (CA - \frac{1}{3}AE)}$.

Donc au lieu de $CP = \frac{3}{8}EF + \frac{BCD}{ABDA} \times \frac{3}{8}AE$,

on aura $CP = \frac{3}{8}EF + \frac{EF \times \frac{1}{8}CE}{CA - \frac{1}{3}AE}$.

Multipliant la première partie $\frac{3}{8}EF$ du second membre par $CA - \frac{1}{3}AE$, & la divisant ensuite par la même quantité, on aura

$$CP = \frac{\frac{3}{8}EF \times CA - \frac{1}{8}EF \times AE + \frac{1}{8}EF \times CE}{CA - \frac{1}{3}AE} = \frac{\frac{1}{8}EF \times (3CA + CE - AE)}{CA - \frac{1}{3}AE}.$$

Mais $3CA + CE - AE = 2CA + CE + CA - AE = 2CA + 2CE = 2EF$.

Donc $CP = \frac{\frac{1}{8}EF \times 2EF}{CA - \frac{1}{3}AE} = \frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

103. Lorsque le segment sphérique $ABDA$ deviendra une demi-sphère, chacune des deux parties AE, EF du diamètre AF deviendra égale au rayon CA. Alors au lieu de $CP = \frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$, on aura Fig. 68.

$CP = \frac{\frac{1}{4}\overline{CA}^2}{CA - \frac{1}{3}CA} = \frac{\frac{1}{4}CA}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}CA$; c'est-

dire que le centre de gravité de la demi-sphère est éloigné du cèntre de la sphère, d'une quantité égale aux trois huitièmes du rayon : ce que nous avons déjà démontré (n°. 99.).

COROLLAIRE II.

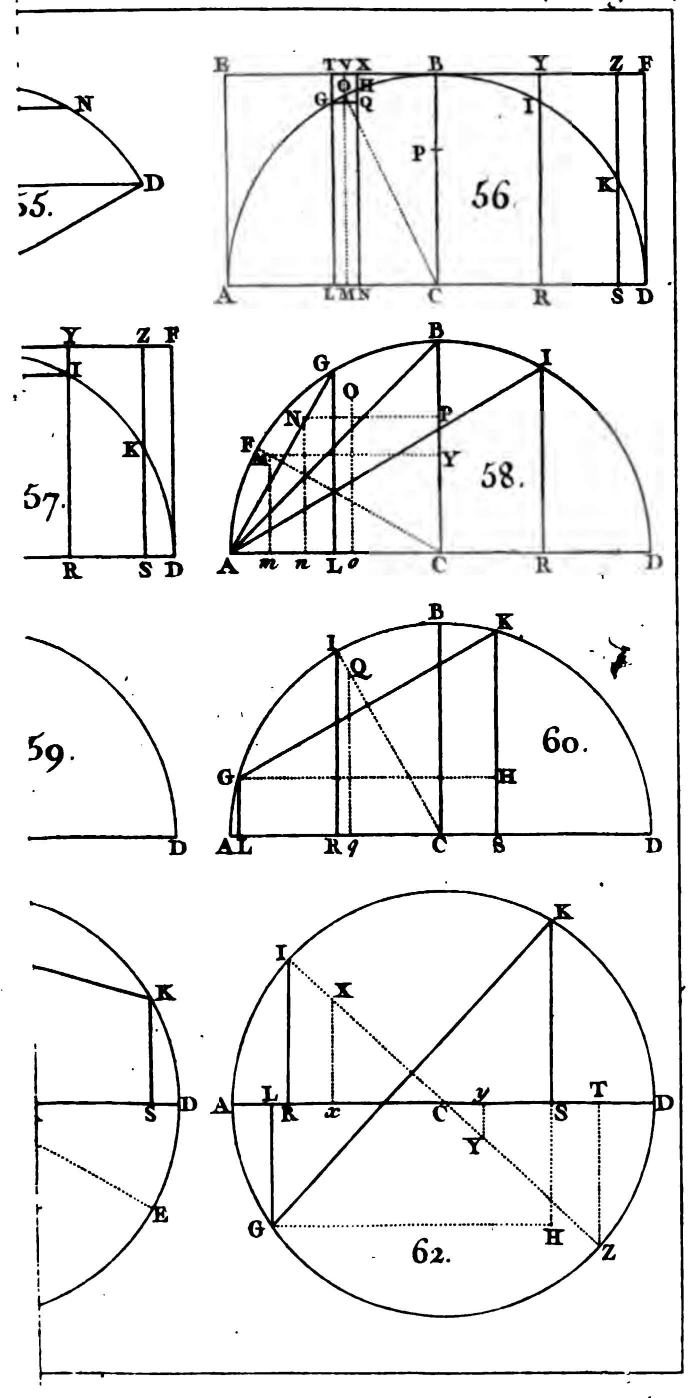
Fig. 69. 104. *Si l'arc BAD*, qui est le profil de la calotte du segment, étoit de 120 degrés, on auroit $AE = \frac{1}{2} CA$, & $EF = \frac{1}{2} CA$.

Ainsi au lieu de $CP = \dfrac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3} AE}$, l'on auroit

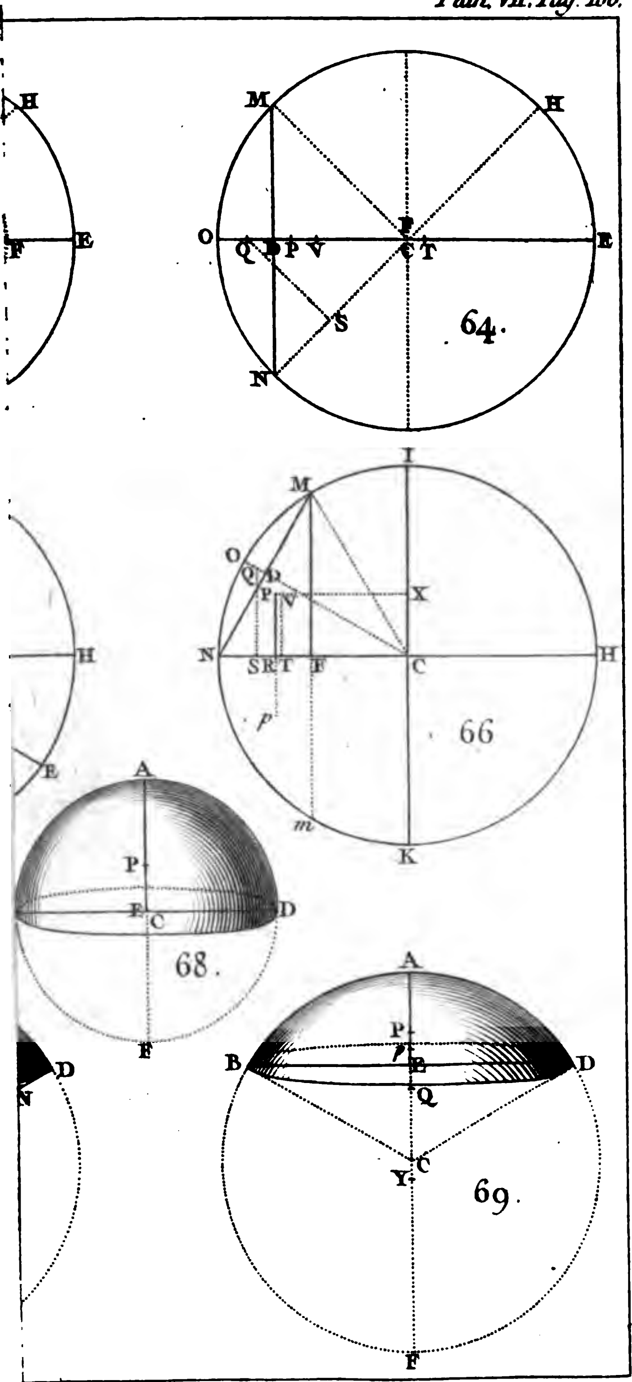
$$CP = \frac{\frac{9}{16}\overline{CA}^2}{CA - \frac{1}{6} CA} = \frac{54\ CA}{80} = \frac{27}{40} CA.$$

REMARQUE.

Fig. 69. 105. Comme les deux segmens sphèriques *ABDA*, *FBDF* qui composent la sphère entière, sont en équilibre sur le centre *C* de la sphère, il est évident que leurs momens considérés par rapport à ce centre, sont égaux. Or on aura le moment du segment sphérique dont *ABDA* est le profil, en multipliant CP ou $\dfrac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3} AE}$ par le solide de ce segment ; ainsi le même produit sera le moment du segment dont *FBDF* est le profil : & supposant que *Y* est le centre de gravité de ce dernier segment, de son moment divisé par le solide de *FBDF* on conclurra $CY = \dfrac{\frac{1}{4}\overline{AE}^2}{CA - \frac{1}{3} EF}$.



N
D
55.
E
T
V
X
B
Y
Z
F
O
H
G
Q
I
P
56.
K
A
L
M
N
C
R
S
D
Y
Z
F
I
K
57.
R
S
D
B
G
I
O
N
P
F
M
Y
58.
A
m
n
L
o
C
R
D
59.
D
B
K
I
Q
60.
G
H
A
L
R
q
C
S
D
K
S
D
E
K
I
X
L
y
T
A
R
x
C
S
D
Y
G
H
Z
62.


H
E
F
M
H
O
Q
D
P
V
P
C
T
E
S
64.
N
I
M
O
Q
D
P
V
X
N
S
R
T
F
C
H
p
66
m
K
H
E
A
P
E
C
D
68.
F
D
N
A
P
p
B
E
D
Q
C
Y
69.
F

CHAPITRE VI.

Des centres de gravité des aires des ſegmens & ſecteurs elliptiques.

DÉFINITIONS.

106. ON a dit dans les Élémens de Géométrie (*n*°. 609) qu'un demi-cercle étant décrit ſur un diamètre quelconque *AB*, ſi de tant de points *M*, *Q*, *S*, *D*, *&c.* qu'on voudra de la demi-circonférence, l'on abaiſſe des perpendiculaires *MP*, *QR*, *ST*, *DC*, *&c.* ſur le diamètre *AB*, & que l'on coupe toutes ces perpendiculaires en parties proportionnelles, c'eſt-à-dire de maniére que l'on ait Fig. 70.

$GP:HR:IT:EC:\&c.::MP:QR:ST:DC:\&c.$ la courbe *AEB* qu'on fera paſſer par tous les points *A*, *G*, *H*, *I*, *E*, *B*, *&c.* ſera nommée une *Demi-ellipſe*.

Si l'on fait la même opération de l'autre côté du diamètre *AB*, c'eſt-à-dire ſi l'on coupe toutes les ordonnées du demi-cercle *ALB* dans le même rapport qu'on a diviſé les ordonnées du premier demi-cercle, la courbe qui paſſera par tous les points de diviſion des ordonnées du demi-cercle *ALB*, ſera l'autre moitié de l'ellipſe.

Le diamètre *AB* qui coupe en deux parties égales & perpendiculairement toutes les cordes du cercle & de l'ellipſe, s'appelle *grand Axe* ou *premier Axe* de l'ellipſe.

La corde *EF* qui paſſe par le centre *C* commun à l'ellipſe & au cercle, & qui eſt perpendiculaire ſur le premier axe *AB*, ſe nomme *petit Axe* ou *ſecond Axe* de l'ellipſe.

Chaque demi-corde PG ou RH de l'ellipse, perpendiculaire au premier axe AB, s'appelle *Ordonnée à ce premier Axe*; de même que chaque demi-corde PM ou RQ du cercle, perpendiculaire au même axe AB qui sert de diamètre au cercle, se nomme *Ordonnée du cercle* par rapport au diamètre AB.

Les ordonnées PG, PM de l'ellipse & du cercle qui rencontrent l'axe ou le diamètre AB au même point P, & dont l'une fait partie de l'autre, s'appellent *Ordonnées correspondantes* de l'ellipse & du cercle; & les extrémités G, M de ces ordonnées, se nomment *Points correspondans* des mêmes courbes.

Fig. 71. Les droites GY, KQ, menées de la circonférence de l'ellipse perpendiculairement sur son second axe EF, s'appellent aussi *Ordonnées* de l'ellipse; & pour les distinguer de celles qui sont perpendiculaires au premier axe, on les nomme *Ordonnées au second axe.*

Si l'on décrit un cercle sur le petit axe EF comme diamètre, & que l'on tire des ordonnées GY, KQ de l'ellipse à ce petit axe, chaque ordonnée GY ou KQ de l'ellipse, & sa portion ZY ou OQ comprise dans le cercle, seront nommées *Ordonnées correspondantes* de l'ellipse & du cercle par rapport au second axe EF; & les points G, Z ou K, O de l'ellipse & du cercle, seront appelés *Points correspondans* de ces deux courbes.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. Si de deux points quelconques M, N de la circonférence du cercle décrit sur le premier axe ou sur le second axe de l'ellipse, l'on mène des perpendiculaires MP, NQ au diamètre AB de ce cercle; l'arc MZN du cercle & celui mzn de l'ellipse, compris entre les ordonnées MP, NQ prolongées s'il est nécessaire, seront nommés *Arcs correspondans*

du cercle & de l'ellipse ; les cordes MN, mn de ces deux arcs correspondans, seront appelées *Cordes correspondantes* ; les segmens $MZNM$, $mznm$ renfermés entre ces arcs & ces cordes, se nommeront *Segmens correspondans* : & si par les extrémités des arcs correspondans l'on mène au centre C du cercle & de l'ellipse des droites MC, NC, mC, nC, ces droites MC, mC ou NC, nC seront nommées *Rayons correspondans* ; enfin les secteurs MCN, mCn renfermés entre ces rayons & arcs correspondans, s'appelleront *Secteurs correspondans* du cercle & de l'ellipse.

Si l'on mène une perpendiculaire au diamètre AB du cercle, qui sert de grand axe ou de petit axe à l'ellipse,

Les points G, g où cette perpendiculaire rencontrera le cercle & l'ellipse correspondans,
Ceux H, h où elle rencontrera les cordes correspondantes MN, mn,
Ceux K, k où elle coupera les rayons correspondans CM, Cm ou leurs prolongemens,
Ceux I, i où elle coupera les rayons correspondans CN, Cn ou leurs prolongemens,

} seront nommés *Points correspondans* par rapport au cercle & à l'ellipse.

Les parties de la perpendiculaire au diamètre ou axe AB, comprises entre ce diamètre & des points correspondans, ou entre des points correspondans par rapport au cercle & à l'ellipse, s'appelleront *Parties correspondantes* d'ordonnées correspondantes ; ainsi FH & Fh, FK & Fk, FI & Fi, GH & gh, GK & gk, GI & gi, HK & hk, HI & hi, IK & ik sont des parties correspondantes d'ordonnées correspondantes.

Les points semblablement placés dans des parties correspondantes d'ordonnées correspondantes, seront aussi nommés *Points correspondans*. Ainsi les milieux L, l des parties correspondantes GH, gh, & ceux des

parties correſpondantes *GI*, *gi* ou *GK*, *gk*, ſont des points correſpondans; d'où il ſuit que les parties d'ordonnées correſpondantes compriſes entre l'axe *AB* & les milieux de leurs parties correſpondantes, ſont auſſi des parties correſpondantes.

Fig. 78 & 79. Lorſque l'ellipſe & le cercle correſpondant ſont coupés par une droite *MN* ou *mn* perpendiculaire à l'axe *AB* qui ſert de diamètre au cercle, les arcs *MAN*, *mAn* du cercle & de l'ellipſe ſont renfermés entre les mêmes perpendiculaires *MSm*, *NSn* à l'axe *AB*; ainſi ces arcs ſont correſpondans; leurs cordes *MN*, *mn* ſont correſpondantes; les ſegmens *AMSNA* *AmSnA* renfermés entre ces cordes & ces arcs correſpondans, ſont des ſegmens correſpondans. Enfin lorſque par les extrémités des arcs correſpondans *MAN*, *mAn*, l'on mène au centre *C* des droites *MC*, *NC* & *mC*, *nC*, les ſecteurs *AMCNA*, *AmCnA* ſont correſpondans dans le cercle & l'ellipſe. Ces arcs, ces cordes, ces ſegmens & ſecteurs correſpondans ne different des précédens, qu'en ce que les derniers ont une flèche commune *AS*, & que les premiers n'ont point de flèche commune.

En conſtruiſant & définiſſant l'ellipſe de la manière qu'on vient de l'expliquer, on la regarde comme un cercle aplati, c'eſt-à-dire comme un cercle décrit ſur ſon grand axe, & dont toutes les ordonnées ſont diminuées proportionnellement à leur longueur: mais on va voir que la même ellipſe peut être conſidérée comme un cercle alongé, c'eſt-à-dire comme un cercle décrit ſur ſon petit axe, & dont toutes les ordonnées ſont alongées proportionnellement.

THÉOREME

THÉOREME.

107. *Si de la circonférence de l'ellipse on mene vers le second axe* EF *des droites* GY, KQ *perpendiculaires à ce second axe, ou paralleles au premier axe* AB, *& qu'on décrive un cercle sur le second axe* EF *comme diametre; les ordonnées* GY, KQ *de l'ellipse seront aux ordonnées correspondantes* ZY, OQ *du cercle, comme* AB *est à* EF, *ou comme* CA *est à* CE, *c'est-à-dire comme le grand axe ou sa moitié, est au petit axe ou à sa moitié.* Fig. 71.

DÉMONSTRATION.

Sur le premier axe AB de l'ellipse, comme diametre, soit décrit un cercle $ADBLA$; & par l'extrémité G d'une ordonnée quelconque GY au second axe EF de l'ellipse, soit menée une perpendiculaire MGP au premier axe AB: puis du point M où cette perpendiculaire rencontre la circonférence du grand cercle, soit tiré le rayon MC. On va d'abord prouver que ce rayon rencontrera en un même point Z, l'ordonnée GY au second axe EF de l'ellipse, & la circonférence du petit cercle décrit sur ce second axe.

Par la propriété de l'ellipse, on aura (nº 106) $CD : CE :: PM : PG$. Mais le point Z étant considéré comme l'intersection du rayon MC avec l'ordonnée GY au second axe, & GY étant parallele à PC, les triangles semblables CPM, ZGM donneront $PM : PG :: CM : CZ$. On aura donc $CD : CE :: CM : CZ$; & puisque les antécédens CD, CM de cette proportion sont égaux, les conséquens CE, CZ seront aussi égaux. Ainsi CE étant

rayon du cercle décrit sur le second axe *EF*, *CZ* sera aussi un rayon du même cercle ; & par conséquent le point *Z* où le rayon *MC* rencontrera l'ordonnée *GY*, sera sur la circonférence du petit cercle *HEIFH*. Cela posé, la démonstration du Théorème sera facile.

Les triangles semblables *CPM*, *ZYC* donnent *CP* : *ZY* :: *CM* : *CZ*, ou :: *CA* : *CE*, ou :: *AB* : *EF*; c'est-à-dire que chaque ordonnée *GY* au petit axe de l'ellipse, est à l'ordonnée correspondante *ZY* du petit cercle décrit sur ce second axe, comme le grand axe *AB* ou sa moitié *CA*, est au petit axe *EF* ou à sa moitié *CE*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Fig. 71. 108. Chaque ordonnée *GY* ou *KQ* au second axe de l'ellipse, étant à l'ordonnée correspondante *ZY* ou *OQ* du cercle décrit sur ce second axe, comme *AB* est à *EF*, ou comme *CA* est à *CE*, on aura *GY* : *ZY* :: *KQ* : *OQ*, ou *GY* : *KQ* :: *ZY* : *OQ*. Ainsi toutes les ordonnées *GY*, *KQ* au second axe de l'ellipse, peuvent être regardées comme les ordonnées *ZY*, *OQ* du cercle décrit sur cet axe, lesquelles sont alongées proportionnellement.

THÉOREME.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. 109. *Si par un point quelconque* G *de la circonférence du cercle correspondant à l'ellipse, on mène une perpendiculaire* GKF *ou* GHF *au diamètre* AB *qui sert de grand axe ou de petit axe à l'ellipse ; les parties de cette perpendiculaire comprises entre l'axe* AB *& des points correspondans du cercle & de l'ellipse, ou entre des points correspondans de ces deux courbes, seront proportionnelles aux deux axes* AB, de *de l'ellipse, ou à leurs moitiés* CA, Cd ;

c'est-à-dire qu'on aura	1°. FG : Fg 2°. FK : Fk 3°. FI : Fi 4°. FH : Fh 5°. GH : gh 6°. GK : gk 7°. GI : gi 8°. HK : hk 9°. HI : hi 10°. IK : ik	: : AB : de *ou* : : CA : Cd.

DÉMONSTRATION.

1°. On vient de voir qu'une ordonnée quelconque *FG* du cercle au diamètre *AB* qui sert de grand axe ou de petit axe à l'ellipse, est à l'ordonnée correspondante *Fg* de l'ellipse, comme cet axe *AB*, est à l'autre axe *de*, ou comme *CA* est à *Cd*; ainsi l'on aura *FG* : *Fg* : : *AB* : *de* ou : : *CA* : *Cd*.

2°. Les droites *FKG*, *PM* étant toutes deux perpendiculaires à l'axe *AB*, & par conséquent parallèles ; les portions de ces lignes comprises entre *CP* & les rayons correspondans *CM*, *Cm* du cercle & de l'ellipse, seront proportionnelles entr'elles ; c'est-à-dire que (*Géom. n°.* 262) l'on aura *FK* : *Fk* : : *PM* : *Pm*. Mais (*n°.* 106) on aura par la propriété de l'ellipse

PM : *Pm* : : *AB* : *de*, ou : : *CA* : *Cd*;

ainsi *FK* : *Fk* : : *AB* : *de*, ou : : *CA* : *Cd*.

3°. Les droites *FHG*, *QN* étant aussi perpendiculaires à l'axe *AB*, & par conséquent parallèles ; les parties de ces lignes comprises entre l'axe *AB* & les rayons correspondans *CN*, *Cn* du cercle & de l'ellipse seront aussi proportionnelles entr'elles ; c'est-à-dire que l'on aura *FI* : *Fi* : : *QN* : *Qn*.

Mais (*n°.* 106) *QN* : *Qn* : : *AB* : *de*, ou : : *CA* : *Cd*.

Donc *FI* : *Fi* : : *AB* : *de*, ou : : *CA* : *Cd*.

4°. Les deux ordonnées PM, QN du cercle étant parallèles entr'elles, & proportionnelle, aux ordonnées correſpondantes Pm, Qn de l'ellipſe ; les cordes correſpondantes MN, mn & l'axe AB prolongés, s'il eſt néceſſaire, concourront en un même point S (*Géom. n°.* 264) ; & par conſéquent (*Géom. n°.* 262) on aura $FH : Fh :: PM : Pm$.

Mais $PM : Pm :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.
Donc $FH : Fh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

5°. Puiſqu'on a trouvé $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FH : Fh \end{matrix}\right\} :: AB : de$,
on aura $FG : Fg :: FH : Fh$;

& par conſéquent { (Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GFH qui coupe l'axe entre ſon extrémité & le point S), on aura $FG + FH : Fg + Fh :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire $GH : gh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.
& (Fig. 73, 74, 76 & 77) on aura $FG - FH : Fg - Fh :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire $GH : gh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

6°. Puiſqu'on a trouvé $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FK : Fk \end{matrix}\right\} :: AB : de$,
on aura $FG : Fg :: FK : Fk$, & par conſéquent $FG - FK : Fg - Fk :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire $GK : gk :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

7°. Puiſque $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FI : Fi \end{matrix}\right\} :: AB : de$,
on aura $FG : Fg :: FI : Fi$;

& par conséquent
1°. $FG + FI : Fg + Fi :: FG : Fg$, ou $AB : de$; c'est-à-dire (fig. 72 & 75) $GI : gi :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.
2°. $FG - FI : Fg - Fi :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'est-à-dire (fig. 73, 74, 76 & 77.) $GI : gi :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

8°. Puisque $\left\{ \begin{matrix} FH : Fh \\ FK : Fk \end{matrix} \right\} :: AB : de$,

on aura $FH : Fh :: FK : Fk$;

& par conséquent (fig. 74 & 77)

$FH - FK : Fh - Fk :: FH : Fh$, ou $:: AB : de$;

c'est-à-dire $HK : hk :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

9°. Puisque $\left\{ \begin{matrix} FH : Fh \\ FI : Fi \end{matrix} \right\} :: AB : de$,

ou aura $FH : Fh :: FI : Fi$;

& par conséquent

(Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GHI qui coupe l'axe entre le centre C & le point S) on aura $FH + FI : Fh + Fi :: FH : Fh :: AB : de$, ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

(Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GHI qui rencontre l'axe entre son extrémité A & le point S) on aura $FI - FH : Fi - Fh :: FH : Fh :: AB : de$, ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

Enfin (fig. 73, 74, 76 & 77) on aura $FH - FI : Fh - Fi :: FH : Fh :: AB : de$, ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

10°. Puisque $\left\{ \begin{array}{l} FK : Fk \\ FI : Fi \end{array} \right\} :: AB : de$,

on aura $FK : Fk :: FI : Fi$;

& par conséquent $\left\{ \begin{array}{l} \text{(Fig. 72 \& 75) } FK + FI : Fk + Fi :: FK : Fk, \\ \text{ou } :: AB : de; \text{ c'est-à-dire} \\ IK : Ik :: AB : de, \text{ ou } :: CA : Cd. \\ \text{(Fig. 73 \& 76) } FK - Fi : Fk - Fi :: FK : Fk, \\ \text{ou } :: AB : de; \text{ c'est-à-dire} \\ IK : ik :: AB : de, \text{ ou } :: CA : Cd. \end{array} \right.$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig 72, 73, 74, 75, 76 & 77. **110.** Si l'on considère deux segmens correspondans $ZMHNZ$, $zmhnz$ du cercle & de l'ellipse, & qu'on les imagine composés d'élémens correspondans GH, gh perpendiculaires à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse ; on reconnoîtra aisément que ces deux segmens sont proportionnels aux deux axes AB, de de l'ellipse.

Car ces segmens correspondans, étant tous deux compris entre les mêmes parallèles MP, NQ ou mP, nQ perpendiculaires à l'axe AB, sont composés d'un même nombre d'élémens : & puisque (*n°.* 109) chaque élément GH du segment circulaire est à chaque élément correspondant gh du segment elliptique correspondant, comme AB est à de, on trouvera que

La somme des élémens du segment circulaire ZMHNZ, *ou l'aire de ce segment*,

Est à la somme des élémens du segment elliptique correspondant zmhnz, *ou à l'aire de ce segment*,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse.*
Est à l'autre axe d e *de l'ellipse.*

On doit remarquer dans les figures 72 & 75, que les segmens circulaire & elliptique correspondans *ZMHNZ*, *zmhnz* contiennent non-seulement des élémens correspondans *GH*, *gh* entre leurs arcs & leurs cordes, mais que leurs parties correspondantes *AZQNA*, *AzQnA* sont encore composées de cordes élémentaires *RT*, *rt* perpendiculaires à l'axe *AB*, & par conséquent parallèles entr'elles. Fig. 72 & 75.

Or ces cordes élémentaires *RT*, *rt* étant doubles des ordonnées *VR*, *Vr* qui sont proportionnelles aux deux axes *AB*, *de* de l'ellipse, sont en même raison que ces axes. Ainsi dans les figures 72 & 75, comme dans les autres, tous les élémens correspondans des deux segmens *ZMHNZ*, *zmhnz* sont proportionnels aux deux axes *AB*, *de*; & par conséquent ces deux segmens qui sont composés d'un même nombre d'élémens, sont aussi proportionnels aux mêmes axes *AB*, *de*.

Il faut encore remarquer que si deux segmens correspondans *AMSNA*, *AmSnA* du cercle & de l'ellipse avoient pour flèche commune une partie *AS* de l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse, ils auroient pour élémens correspondans des cordes correspondantes *RT*, *rt* du cercle & de l'ellipse; & comme ces cordes élémentaires sont doubles des ordonnées correspondantes *VR*, *Vr*, & par conséquent proportionnelles aux deux axes *AB*, *de*, il est clair que dans ce cas, ainsi que dans les autres, on aura cette proportion: Fig. 78 & 79.

La somme des élémens du segment circulaire A M S N A,
ou l'aire de ce segment,

Est à la somme des élémens, ou à l'aire du segment elliptique correspondant A m S n A,

Comme l'axe A B *commun au cercle & à l'ellipse*,

Est à l'autre axe d e *de l'ellipse*.

COROLLAIRE II.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. 111. Si l'on considère deux secteurs correspondans *ZMCNZ*, *zmCnz* du cercle & de l'ellipse, & qu'on les imagine composés d'élémens perpendiculaires sur l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse, on reconnoîtra qu'ils sont composés d'un même nombre d'élémens, & que leurs élémens correspondans sont des lignes correspondantes *KI*, *ki*, ou *GI*, *gi*, ou *GK*, *gk*, ou des cordes correspondantes *RT*, *rt*.

Or (n°. 109) toutes ces lignes correspondantes sont chacune à chacune, comme *AB* est à *de*. Ainsi

La somme des élémens, ou l'aire du secteur circulaire ZMCNZ,

Est à la somme des élémens, ou à l'aire du secteur elliptique correspondant z m C n z,

Comme l'axe A B *commun au cercle & à l'ellipse*,

Est à l'autre axe d e *de l'ellipse*.

Fig. 78 & 79. On peut remarquer que si les deux secteurs correspondans *AMCNA*, *AmCnA* ont un sommet *A* commun, leurs élémens correspondans seront de deux espèces seulement; savoir, des cordes correspondantes *RT*, *rt* qui sont dans le même rapport que les deux axes *AB*, *de*, & des lignes correspondantes *KI*, *ki* qui sont aussi proportionnelles aux mêmes axes *AB*, *de* (*n°*. 109). On aura donc dans tous les cas,

La somme des élémens d'un secteur circulaire, ou l'aire de ce secteur.

Est à la somme des élémens, ou à l'aire du secteur elliptique correspondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse,*

Est à l'autre axe de *de la même ellipse.*

COROLLAIRE III.

112. Si l'on prend les milieux ou centres de gravité L, l des élémens correspondans GH, gh des deux segmens circulaire & elliptique correspondans; on aura $GL : gl :: GH : gh$, ou (n°. 109) $:: AB : de$, Et puisque (n°. 109) on a aussi $FG : Fg :: AB : de$; on aura $FG : Fg :: GL : gl$, & par conséquent $FG - GL : Fg - gl :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'est-à-dire $FL : Fl :: AB : de$. Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

Multipliant cette dernière proportion par ordre avec celle-ci $GH : gh :: AB : de$, on trouvera $GH \times FL : gh \times Fl :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2$; c'est-à-dire que, si l'on considère les momens des élémens des segmens circulaire & elliptique correspondans par rapport à l'axe AB commun à l'ellipse & au cercle, on aura

Le moment GH × FL *de chaque élément* GH *du segment circulaire,*

Est au moment gh × Fl *de chaque élément correspondant du segment elliptique,*

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipse,*

Est au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipse;*

D'où il suit que l'on aura cette proportion :

La somme des momens GH × FL *de tous les élémens du segment circulaire, ou le moment de ce segment considéré par rapport à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse.*

Est à la somme des momens gh × Fl *de tous les élémens du segment elliptique correspondant, ou au moment de ce segment considéré par rapport au même axe AB.*

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipse,*

Est au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipse.*

Ainsi connoissant le moment d'un segment de cercle construit sur l'un des axes donnés d'une ellipse, on trouvera par une simple proportion le moment du segment elliptique correspondant.

Fig. 78 & 79. 113. *On doit remarquer que si les segmens correspondans* AMSNA, AmSnA *du cercle & de l'ellipse avoient la même flèche* AS, *ils seroient tous deux coupés en deux parties égales & semblables par l'axe* AB *commun à l'ellipse & au cercle; ainsi ces deux segmens dont les centres de gravité se trouveroient dans l'axe* AB, *auroient des momens nuls par rapport à cet axe. Mais cette remarque ne fait point une exception à la régle qu'on vient d'établir; car* zéro *pris un nombre de fois quelconque ne produisant jamais que* zéro, zéro *sera à* zéro *dans quel rapport on voudra, & par conséquent on aura toûjours*

Le moment du segment circulaire *AMSNA*, quoique nul par rapport au diamètre *AB* commun au cercle & à l'ellipse,

Est au moment du segment elliptique correspon-

dant $AmSnA$, qui est aussi nul par rapport au même axe AB,

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ de cet axe,

Est au quarré $\overline{de}^2$ de l'autre axe de l'ellipse.

Corollaire IV.

114. On démontrera de la même manière que le moment de chaque élément du secteur circulaire MCN, considéré par rapport à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse, est au moment de chaque élément correspondant du secteur elliptique mCn, considéré par rapport au même axe AB, comme le quarré $\overline{AB}^2$ de cet axe, est au quarré $\overline{de}^2$ de l'autre axe de l'ellipse. Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

Car on ne trouve dans ces secteurs que quatre sortes d'élémens; savoir,

Fig. 72, 73, 74, 75, 76, 77, des élémens correspondans GI, gi compris entre les arcs correspondans MZN, mzn & leurs rayons correspondans CN, Cn.

Fig. 74 & 77, des élémens correspondans GK, gk contenus entre les mêmes arcs correspondans MZN, mzn & leurs rayons correspondans CM, Cm.

Fig. 72, 73, 75, 76, des élémens correspondans KI, ki compris entre les rayons extrêmes CM, CN du secteur circulaire, & les rayons extrêmes correspondans Cm, Cn du secteur elliptique.

Fig. 72, 75, des élémens correspondans RT, rt terminés par les arcs correspondans MZN, mzn, dont nous avons déjà prouvé (nº. 112) que les momens sont proportionnels aux quarrés $\overline{AB}^2$, $\overline{de}^2$ des deux axes de l'ellipse.

Or (*n*°. 109) tous ces élémens correſpondans ſont proportionnels aux deux axes AB, de. Ainſi en prenant leurs milieux X, x; Y, y; O; o;

on aura $\left\{\begin{matrix} IX : ix \\ KY : ky \\ IO : io \end{matrix}\right\} :: AB : de$;

& puiſque (*n*°. 109) $\left\{\begin{matrix} FI : Fi \\ FK : Fk \end{matrix}\right\} :: AB : de$;

on aura $\left\{\begin{matrix} IX : ix :: FI : Fi \\ KY : ky :: FK : Fk \\ IO : io :: FI : Fi \end{matrix}\right\}$ ou $:: AB : de$;

& par conſéquent

Fig. 72, 75. $IX - FI : ix - Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } c'eſt-à-dire
Fig. 73, 74, 76, 77. $IX + FI : ix + Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } $FX : Fx :: AB : de$

Fig. 74, 77. $KY + FK : ky + Fk :: FK : Fk$ ou $:: AB : de$ { c'eſt-à-dire $FY : Fy :: AB : de$

Fig. 72, 75. $IO - FI : io - Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } c'eſt-à-dire
Fig. 73, 76. $IO + FI : io + Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } $FO : Fo :: AB : de$

Multipliant par ordre ces proportions avec celles-ci.............................. $\left\{\begin{matrix} GI : gi :: AB : de \\ GK : gk :: AB : de \\ KI : ki :: AB : de. \end{matrix}\right.$

Savoir $\left\{\begin{matrix} GI : gi :: AB : de \text{ par } FX : Fx :: AB : de \\ GK : gk :: AB : de \text{ par } FY : Fy :: AB : de \\ KI : ki :: AB : de \text{ par } FO : Fo :: AB : de \end{matrix}\right\}$

on aura $\left\{\begin{matrix} GI \times FX : gi \times Fx :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 \\ GK \times FY : gk \times Fy :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 \\ KI \times FO : ki \times Fo :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 ; \end{matrix}\right\}$ c'eſt-à-dire que

Le moment de chaque élément du ſecteur circulaire MCN, *conſidéré par rapport à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt au moment de chaque élément correſpondant du

secteur elliptique m C n, *considéré par rapport au même axe AB*.

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de cet axe*,

Est au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipse*;

D'où il suit que l'on aura aussi

La somme des momens des élémens du secteur circulaire; ou le moment de ce secteur, considéré par rapport à l'axe AB,

Est à la somme des momens de tous les élémens correspondans du secteur elliptique; ou au moment de ce secteur, considéré par rapport au même axe AB,

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de cet axe*,

Est au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipse*.

115. *On remarquera comme on a fait* (n°. 113) *pour les segmens circulaires & elliptiques correspondans, que si le secteur circulaire* MCN *& le secteur elliptique correspondant* m C n *ont une flèche commune* AS, *ils seront divisés en deux parties égales & semblables par l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse. Ainsi ces deux secteurs dont les centres de gravité se trouveront dans l'axe* AB, *auront des momens nuls par rapport à cet axe. Mais ces momens nuls n'apportent point d'exception à l'analogie qu'on vient de démontrer.* Fig. 78 & 79.

COROLLAIRE V.

116. Les élémens *GH*, *gh* des segmens circulaire & elliptique correspondans étant toûjours supposés perpendiculaires à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse; si l'on considère leurs momens relativement à un axe quelconque *DE* qui leur soit parallèle, les perpendiculaires *L&*, *l&* menées des centres de gravité Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

L, l des élémens correspondans GH, gh sur cet axe DE, seront égales ; ainsi l'on aura cette proportion $GH \times L \& : gh \times l \& :: GH : gh$; ou (nº. 109) $:: AB : de$; c'est-à-dire, que le moment de chaque élément du segment circulaire, sera au moment de chaque élément correspondant du segment elliptique, comme l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse est à l'autre axe de de l'ellipse.

Fig. 72, 73, 75, 76. Donc dans les cas où les segmens correspondans ne seront pas coupés par l'axe DE, relativement auquel on considère les momens, on aura

La somme des momens de tous les élémens du segment circulaire, ou le moment de ce segment,

Est à la somme des momens de tous les élémens du segment elliptique correspondant, ou au moment de ce segment,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse,*

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Fig. 74 & 77. Et dans le cas où les deux segmens correspondans du cercle & de l'ellipse seront divisés par l'axe DE des momens, le premier en deux parties DMV, DNV, le second en deux parties correspondantes dmu, dnu; on aura

La somme des momens des élémens qui composent la partie DMV *ou* DNV *du segment circulaire, c'est-à-dire le moment de cette partie* DMV *ou* DNV,

Est à la somme des momens des élémens qui composent la partie correspondante dmu *ou* dnu *du segment elliptique, c'est-à-dire est au moment de cette partie* dmu *ou* dnu,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse,*

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Ainsi dans ce dernier cas l'on aura

Le moment de la partie D N V *du segment circulaire.*

Est au moment de la partie correspondante d n u *du segment elliptique.*

Comme le moment de l'autre partie D M V *du segment circulaire.*

Est au moment de la partie correspondante d m u *du segment elliptique;*

Et par conséquent en prenant la différence des antécédens & des conséquens, on aura

La différence des momens opposés des deux parties D N V, D M V *du segment circulaire, ou le moment de ce segment.*

Est à la différence des momens opposés des deux parties d n u, d m u *du segment elliptique correspondant, ou au moment de ce segment.*

Comme le moment de la partie D N V,

Est au moment de la partie correspondante d n u,

ou { *Comme l'axe* A B *commun au cercle & à l'ellipse.*
Est à l'autre axe d e *de l'ellipse.*

Lorsque le segment circulaire *A M S N A*, & le segment elliptique correspondant *A m S n A* ont la même flèche *A S*, & que l'on considère leurs momens par rapport à un axe *D E* parallèle à leurs cordes *M N*, *m n*, ou perpendiculaire à l'axe *A B* commun au cercle & à l'ellipse, ils sont dans le cas des segmens dont nous venons de comparer les momens; c'est-à-dire que leurs momens sont proportionnels aux deux axes *A B*, *d e* de l'ellipse. Fig. 78 & 79.

Car si par un point quelconque *V* de la flèche commune *A S*, l'on mène à l'axe *A B* commun au cercle & à l'ellipse une perpendiculaire *M N* ou *m n*,

qui rencontre la circonférence du cercle en M, N; & celle de l'ellipse en m, n; les cordes MN, mn feront des élemens correspondans des deux segmens $AMSNA$, $AmSnA$, & les produits $RT \times CV$, $rt \times CV$ feront les momens de ces élémens correspondans, relativement à l'axe DE.

Or $RT \times CV : rt \times CV :: RT : rt$ ou $:: VR : Vr$, ou (n°. 106) $:: AB : de$.

Donc si l'on considère les momens de deux segmens $AMSNA$, $AmSnA$ circulaire & elliptique par rapport à un axe DE perpendiculaire à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse, on aura

La somme des momens RT × CV *de tous les élémens du segment circulaire* AMSNA, *ou le moment de ce segment*,

Est à la somme des momens rt × CV *de tous les élémens du segment elliptique correspondans* AmSnA, *ou au moment de ce segment*,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse*.

Est à l'autre axe de *de l'ellipse*.

COROLLAIRE VI.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

117. Si l'on veut comparer les momens des secteurs correspondans $ZMCNZ$, $zmCnz$ du cercle & de l'ellipse, relativement à un axe DE perpendiculaire à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse, on trouvera que leurs momens sont proportionnels aux deux axes AB, de.

Car si l'on considère que ces secteurs sont composés d'un même nombre d'élémens perpendiculaires à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipse; que ces élémens correspondans sont proportionnels aux deux axes

axes *AB*, *de*; & que leurs milieux ou centres de gravité étant également éloignés de l'axe *DE* par rapport auquel on considère les momens, les produits de ces élémens & de leur distance à l'axe *DE*, sont proportionnels à ces élémens; on reconnoîtra aisément que

Dans le cas où les secteurs correspondans ne sont pas coupés par l'axe *DE* des momens, on aura Fig. 71, 73, 75, & 76.

La somme des momens de tous les élémens du secteur circulaire ZMCNZ, *ou le momens de ce secteur*,

A la somme des moment des élémens du secteur elliptique correspondant zmCnz, *ou au moment de ce secteur*,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse*;

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Et dans le cas où les deux secteurs correspondans *ZMCNZ*, *zmCnz* du cercle & de l'ellipse sont partagés par l'axe *DE*, l'un en deux secteurs *MCD*; *NCD*; l'autre en deux secteurs *mCd*, *nCd* correspondans aux deux premiers; on trouvera que Fig. 74 & 77.

Le moment de chacun des deux secteurs circulaires MCD, NCD,

Est au moment de chacun des deux secteurs elliptiques correspondans mCd; nCd,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse*;

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Ainsi l'on aura dans ce second cas

Le moment du secteur circulaire MCD,

Au moment du secteur elliptique correspondant mCd;

Comme le moment du secteur circulaire NCD,

Est au moment du secteur elliptique correspondant nCd.

Ou { *Comme l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse*;
Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Et par conséquent si l'on prend la différence des antécédens & des conséquens de cette proportion, l'on aura

La différence des momens opposés des deux secteurs circulaires MCD, NCD, *ou le moment du secteur entier* ZMCNZ,

Est à la différence des momens opposés des deux secteurs elliptiques correspondans mCd, nCd, *ou au moment du secteur elliptique entier* zmCnz.

Comme le moment du secteur circulaire MCN,

Est au moment du secteur elliptique mCn.

Ou { *Comme l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse*,
Est à l'autre axe de *de l'ellipse*.

Fig. 78 & 79. Si les secteurs circulaire & elliptique correspondans *AMCNA*, *AmCnA* sont divisés chacun en deux parties égales & semblables par l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse, il est évident qu'ils seront dans le premier cas des secteurs de ce Corollaire. Ainsi leurs momens seront proportionnels aux deux axes *AB*, *de* de l'ellipse.

THÉOREME.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. 118. *Les centres de gravité de deux segmens ou de deux secteurs correspondans du cercle & de l'ellipse, sont dans une même perpendiculaire à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse.*

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que les centres de gravité de deux segmens ou de deux secteurs correspondans du cercle & de l'ellipse, sont dans une même droite perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse;

il suffit de faire voir que ces centres de gravité sont également éloignés d'un axe de momens *DE* perpendiculaire à l'axe *AB*.

On a trouvé (*nos*. 116 & 117) que si l'on considère les momens de deux segmens ou de deux secteurs correspondans du cercle & de l'ellipse par rapport à un même axe *DE* perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse, on aura

Le moment du segment ou du secteur circulaire,

Est au moment du segment ou du secteur elliptique correspondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse,*

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

On a vû aussi (*nos*. 110 & 111) que dans tous les cas,

L'aire du segment ou du secteur circulaire,

Est à l'aire du segment ou du secteur elliptique correspondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse,*

Est à l'autre axe de *de l'ellipse.*

Ainsi en divisant ces deux proportions par ordre, on aura

Le moment du segment ou du secteur circulaire, divisé par l'aire de ce segment ou de ce secteur,

Est au moment du segment ou du secteur elliptique correspondant, divisé par l'aire de ce segment ou de ce secteur,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipse, divisé par lui-même, c'est-à-dire comme l'unité,*

Est à l'autre axe de *de l'ellipse, divisé par lui-même, ou à l'unité.*

Or les deux derniers termes de cette proportion étant égaux, les deux premiers le seront aussi.

Mais (*n*°. 61) le moment du ſegment ou du ſecteur circulaire ou elliptique, diviſé par l'aire de ce ſegment ou de ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur à l'axe *DE* relativement auquel on a conſidéré le moment.

Donc la diſtance de l'axe *DE* des momens au centre de gravité du ſegment ou du ſecteur circulaire, eſt égale à la diſtance du même axe *DE* au centre de gravité du ſegment ou du ſecteur elliptique correſpondant. Ainſi les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ſont dans une même droite parallèle à l'axe *DE*, ou perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe.

Corollaire I.

Fig. 78 & 79. 119. Lorſque le ſegment ou le ſecteur circulaire & le ſegment ou le ſecteur elliptique correſpondant ont pour fléche commune une partie *AS* de l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, & ſont par conſéquent diviſés chacun en deux parties égales & ſemblables par cet axe *AB*, il eſt évident que les centres de gravité de ces deux ſegmens ou de ces deux ſecteurs correſpondans ſont dans le même axe *AB*.

Mais on vient de démontrer que les centres de gravité de ces deux ſegmens ou de ces deux ſecteurs ſont également éloignés d'un axe de momens *DE* perpendiculaire au même axe *AB*.

Donc les deux ſegmens ou les deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe dont il eſt queſtion ont le même centre de gravité.

COROLLAIRE II.

120. Donc si l'on veut avoir le centre de gravité d'un segment elliptique *AmSnA* divisé en deux parties égales & semblables par le grand ou le petit axe *AB* de l'ellipse, on pourra décrire ou imaginer sur cet axe *AB* comme diamètre un cercle *ADBEA*, & prolonger, s'il est nécessaire, la corde *mn* de ce segment jusqu'à la circonférence du cercle, pour avoir le segment circulaire correspondant *AMSNA*; ensuite chercher (*n*°. 89 & *suiv.*) le centre de gravité *V* de ce segment circulaire, & prendre ce centre de gravité *V* pour celui du segment elliptique *AmSnA*. Fig. 78 & 79.

Or on déterminera (*n*°. 89) le centre de gravité *V* du segment circulaire *AMSNA*, si l'on prend sur l'axe *AB*, en partant du centre *C*, une partie $CV = \frac{2}{3}\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$. Ainsi l'on aura par ce moyen le centre de gravité *V* du segment elliptique *AmSnA*.

Mais (*n*°. 109) $de : AB :: Sm : SM$, ou $\overline{de}^3 : \overline{AB}^3 :: \overline{Sm}^3 : \overline{SM}^3$; & l'on a trouvé (*n*°. 110) $de : AB :: AmSnA : AMSNA$. Donc en divisant ces deux proportions par ordre, on aura $\overline{de}^2 : \overline{AB}^2 :: \frac{\overline{Sm}^3}{AmSnA} : \frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$, & par conséquent $\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA} = \frac{\overline{Sm}^3 \times \overline{AB}^2}{AmSnA \times \overline{de}^2}$.

Ainsi $\frac{2}{3}\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$ ou $CV = \frac{2}{3}\frac{\overline{Sm}^3 \times \overline{AB}^2}{AmSnA \times \overline{de}^2}$.

COROLLAIRE III.

121. Si l'on demande le centre de gravité d'un Fig. 78 & 79.

secteur elliptique $AmCnA$ divisé en deux parties égales & semblables par le grand ou le petit axe AB de l'ellipse; on décrira ou l'on imaginera sur cet axe AB comme diamètre un cercle $ADBEA$, & l'on prolongera s'il est nécessaire la corde mn de l'arc de ce secteur, jusqu'à la circonférence du cercle qui sera rencontrée en M, N; puis on tirera les deux rayons CM, CN, pour avoir un secteur circulaire $AMCNA$ correspondant au secteur elliptique; enfin l'on cherchera (*n°. 85 & suivans*) le centre de gravité Q de ce secteur circulaire, & l'on prendra ce centre de gravité Q pour celui du secteur elliptique $AmCnA$.

Mais (*n°. 85*) on aura le centre de gravité Q du secteur circulaire $AMCNA$, si l'on prend sur l'axe AB, une partie $CQ = \frac{2}{3}\ \frac{MN \times CA}{MAN}$.

Ainsi l'on aura le centre de gravité Q du secteur elliptique $AmCnA$ par le même moyen.

THÉOREME.

Fig. 80 & 81. **122.** *Deux segmens correspondans* ZMONZ, zmonz *du cercle & de l'ellipse, étant terminés par les mêmes ordonnées* MP, NQ *ou* mP, nQ *perpendiculaires à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipse :*

1°. *Si du centre de gravité* V *du segment circulaire* ZMONZ *l'on mène une perpendiculaire* VT *à l'axe* AB, *& que l'on prenne sur cette perpendiculaire une partie* Tu, *telle que l'on ait* AB : de :: TV : Tu; *le point* u *sera le centre de gravité du segment elliptique correspondant* zmonz.

2°. *Si du centre de gravité* X *du secteur circulaire* ZMCNZ, *l'on abaisse une perpendiculaire* XY *sur l'axe* AB, *& qu'on prenne sur cette perpendiculaire une*

partie Y x, *telle que l'on ait* A B : d e :: Y X : Y x, *le point* x *sera le centre de gravité du secteur elliptique correspondant* z m C n z.

DÉMONSTRATION.

On a démontré (*n°.* 118) que les centres de gravité de deux segmens ou de deux secteurs correspondans du cercle & de l'ellipse sont dans une même perpendiculaire à l'axe *A B* commun au cercle & à l'ellipse : ainsi les centres de gravité *u*, *x* du segment elliptique *z m o n z* & du secteur elliptique *z m C n z* seront dans les perpendiculaires *V T*, *X Y* menées des centres de gravité *V*, *X* du segment circulaire *Z M O N Z*, & du secteur circulaire *Z M C N Z*.

Ainsi il reste seulement à démontrer que $\begin{cases} TV : Tu :: AB : de \\ YX : Yx :: AB : de. \end{cases}$

On a vû (*nos.* 112 & 114) que les momens des segmens & des secteurs circulaires & elliptiques correspondans, étant considérés relativement à l'axe *A B* commun au cercle & à l'ellipse, on aura

Le moment Z M O N Z × T V *du segment circulaire*, *ou celui* Z M C N Z × Y X *du secteur circulaire*.

Est au moment z m o n z × T u *du segment elliptique*, *ou à celui* z m C n z × Y x *du secteur elliptique*.

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipse*.

Est au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipse*.

Et l'on a trouvé (*nos.* 110 & 111) que

Le segment ZMONZ *ou le secteur* ZMCNZ *du cercle*.

Est au segment z m o n z *ou au secteur* z m C n z *de l'ellipse*.

Comme l'axe A B *commun au cercle & à l'ellipse*.

Est à l'autre axe d e *de l'ellipse*.

Ainsi en divisant ces deux proportions par ordre, on aura $\left\{ \begin{matrix} TV : Tu \\ YX : Yx \end{matrix} \right\}$ :: *AB* : *de*. C. Q. F. D.

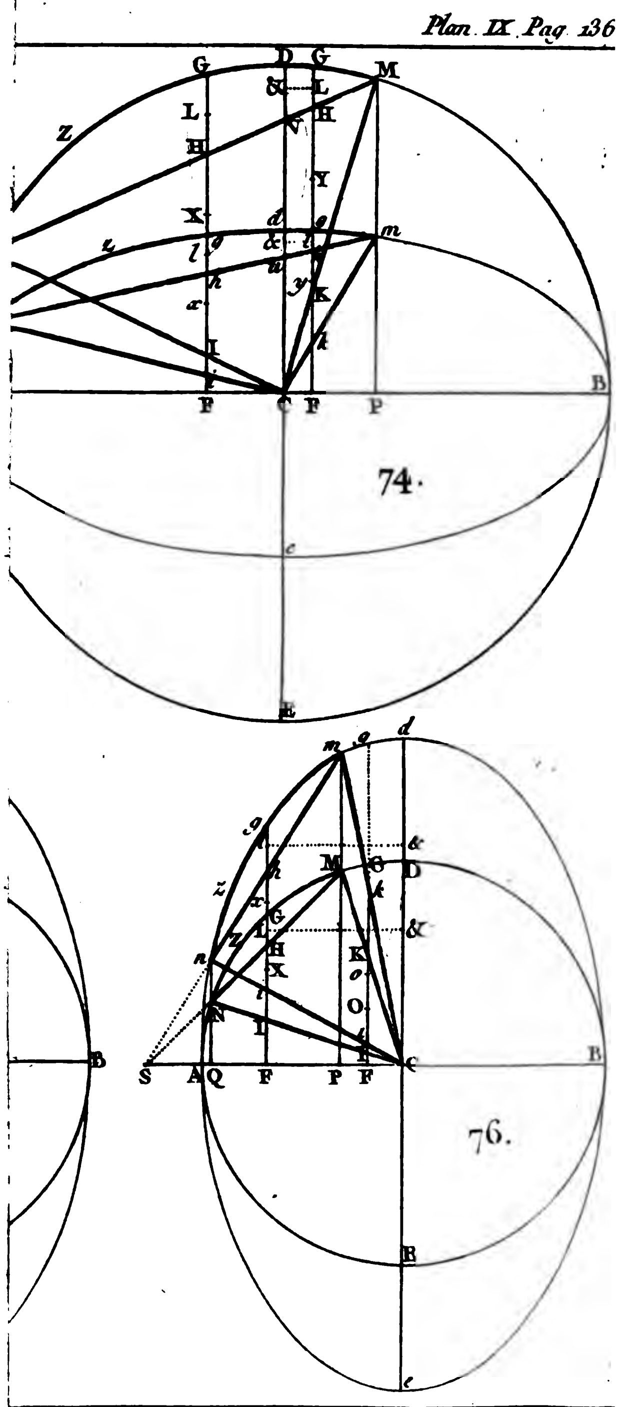
Corollaire.

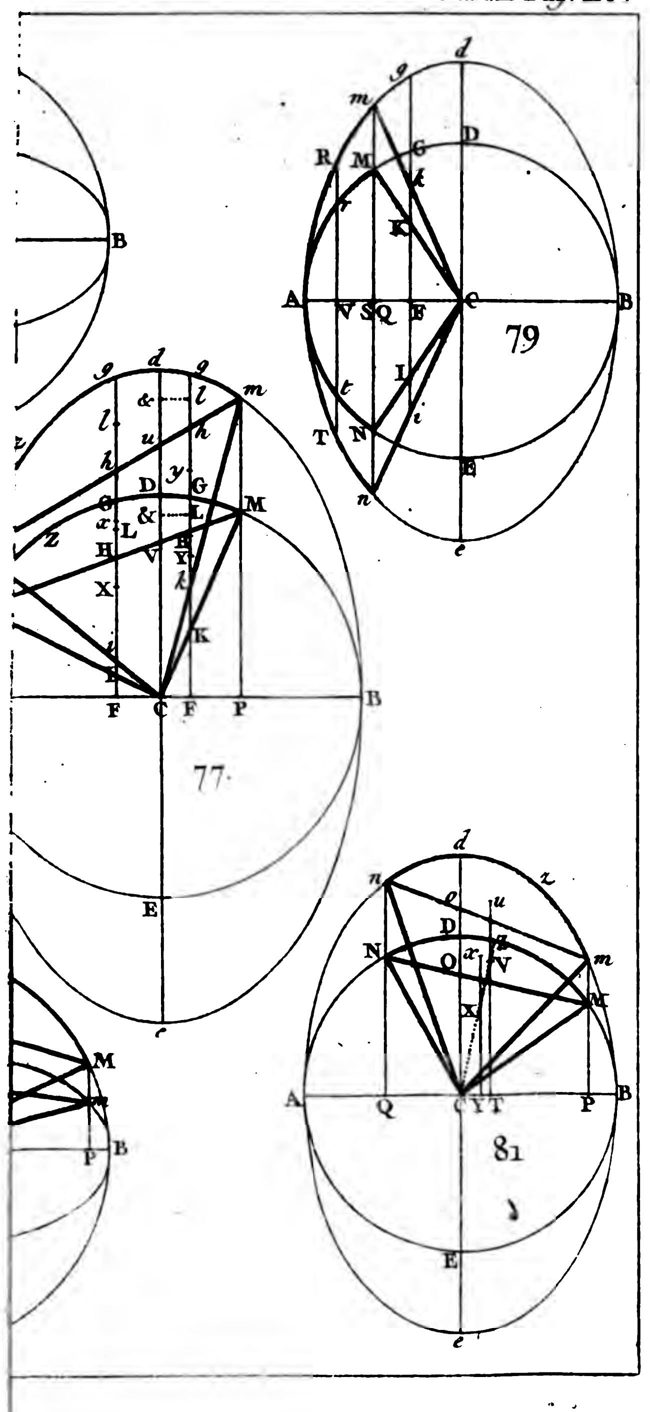
Fig. 80 & 81. 123. Donc si l'on veut avoir le centre de gravité *u* d'un segment quelconque *z m o n z*, ou celui *x* d'un secteur *z m C n z* de l'ellipse, on cherchera un axe *AB* de l'ellipse, & l'on décrira un cercle sur cet axe comme diamètre. Puis par les extrémités *m*, *n* de l'arc du segment ou du secteur elliptique, on mènera deux ordonnées *mP*, *nQ* à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse, afin que ces ordonnées prolongées s'il est nécessaire jusqu'à la circonférence du cercle, déterminent sur cette circonférence un arc *MZN* correspondant à celui *m z n* du segment ou du secteur elliptique. Ensuite la corde *MN* & les rayons extrêmes *MC*, *NC* de l'arc de cercle *MZN* étant tirés, on trouvera (*n°.* 89 *& suivans*, & *n°.* 85 *& suivans*) le centre de gravité *V* du segment circulaire *ZMONZ* & celui *X* du secteur circulaire *ZMCNZ*. Enfin l'on mènera par ces centres de gravité *V*, *X*, des perpendiculaires *VT*, *XY* à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipse : & ayant pris sur elles, prolongées s'il est nécessaire, des parties *Tu*, *Yx* qui soient à ces perpendiculaires comme *de* est à *AB*, les points *u*, *x* ainsi déterminés seront les centres de gravité du segment *z m o n z* & du secteur *z m C n z* de l'ellipse.



72.

73.


74.
76.


79
77
81

CHAPITRE VII.

Des centres de gravité des segmens & secteurs de sphéroïdes elliptiques.

LEMME.

124. Lorsque *des droites* F A a, G M m, H D d, &c. *parallèles entr'elles, sont rencontrées par des plans* Z V, X V, Y V *qui concourent en une même droite* R V, *elles sont coupées par ces plans en parties proportionnelles entr'elles & à leurs totalités.* Fig. 82 & 83.

DÉMONSTRATION.

Soient menés par les droites parallèles *FAa*, *GMm*, *HDd*, &c. des plans *FRa*, *GSm*, *HTd*, &c. parallèles entr'eux.

Les droites *FR*, *GS*, *HT*, &c. où ces plans parallèles rencontreront le plan *ZV*, seront parallèles.

Les droites *AR*, *MS*, *DT*, &c. où les mêmes plans parallèles rencontreront le plan *XV*, seront aussi parallèles.

Enfin les droites *aR*, *mS*, *dT*, &c. où les mêmes plans parallèles rencontreront le plan *YV*, seront parallèles entr'elles.

Ainsi tous les triangles *FRA*, *GSM*, *HTD*, &c. auront les côtés parallèles chacun à chacun, & seront par conséquent semblables ; & tous les triangles *FRa*, *GSm*, *HTd*, &c. auront aussi les côtés parallèles chacun à chacun, & seront par conséquent semblables.

Les triangles semblables *FRA*, *GSM*, *HTD*, &c. donneront *FA* : *GM* : *HD* : &c :: *FR* : *GS* : *HT* : &c.

Les triangles semblables FRa, GSm, HTd, &c. donneront $FR : GS : HT : \&c :: Fa : Gm : Hd : \&c.$

Donc $FA : GM : HD : \&c :: Fa : Gm : Hd : \&c.$

C'est-à-dire, $FA : Fa :: GM : Gm :: HD : Hd : \&c.$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 82 & 83. 125. Donc si tant de droites qu'on voudra FAa, GMm, HDd, &c. parallèles entr'elles, & terminées par deux plans ZV, YV qui se rencontrent en RV, sont coupées en parties proportionnelles aux points A, M, D, &c. ou alongées proportionnellement jusqu'aux points A, M, D, &c. c'est-à-dire si $FA : GM : HD : \&c. :: Fa : Gm : Hd : \&c.$ les points A, M, D, &c. seront dans un même plan XV qui passera par la section commune RV des deux premiers plans.

Car si le plan XV, qui passeroit par le point A de la droite FAa & par la section commune RV des deux premiers plans, ne passoit pas par les points M, D, &c. des autres lignes GMm, HDd, il passeroit par quelques autres points O, Q, &c. de ces lignes ; & l'on auroit (n°. 124) $FA : GO : HQ : \&c :: Fa : Gm : Hd : \&c.$

Mais on suppose $FA : GM : HD : \&c :: Fa : Gm : Hd : \&c.$

Ainsi l'on auroit $FA : GO : HQ : \&c :: FA : GM : HD : \&c$: ce qui ne peut arriver que dans le cas où les points M, D, &c. se confondent avec les points O, Q, &c. dans lesquels on suppose que le plan XV rencontre les lignes GMm, HDd.

REMARQUE.

Fig. 82 & 83. 126. On peut remarquer que si les droites parallèles FAa, GMm, HDd, LBb, IEe, &c. forment par leurs rencontres avec le plan XV, la circonférence

d'un cercle *AMDBEA*, ces mêmes lignes formeront par leurs rencontres avec les deux autres plans *ZV*, *YV*, des circonférences d'ellipses, dont une peut être un cercle dans certains cas.

La première partie de cette remarque étant essentielle à la théorie des centres de gravité des segmens & secteurs d'ellipsoïdes, on n'en doit pas négliger la démonstration, sur-tout dans le cas où les parallèles FAa, GMm, HDd, LBb, IEe, &c. *sont perpendiculaires à l'un des trois plans, par exemple, au plan* ZV; *parce que dans la suite de ce chapitre on trouvera des ellipses & des cercles correspondans formés de cette manière, & qu'on n'en pourroit pas reconnoître la nature sans la démonstration de cette remarque.*

Par un diamètre *AB* du cercle *AMDBEA*, parallèle à la section commune *RV* des trois plans, & par les deux droites *FAa*, *LBb*, qui terminent ce diamètre & qu'on suppose perpendiculaires au plan *ZV*, on mènera un plan *FBa* qui rencontrera les deux plans *ZV*, *YV* en *FL*, *ab*, & qui sera perpendiculaire au plan *ZV*.

La section commune *RV* des trois plans, étant parallèle au diamètre *AB*, peut être considérée comme une ligne contenue dans un plan parallèle au plan *FBa* qui passe par le diamètre *AB*. Ainsi *RV*, *FL* & *RV*, *ab* peuvent être regardées comme des sections de ces deux plans parallèles coupés par les plans *ZV*, *YV*; d'où il suit que les trois droites *FL*, *AB*, *ab* sont parallèles à *RV*, & par conséquent parallèles entr'elles : & comme les parallèles *FL*, *AB*, *ab* sont comprises entre des parallèles *FAa*, *LBb*, les quadrilatères *FB*, *Fb*, *Ab* sont des parallélogrammes & ont les côtés opposés égaux.

Par le centre *C* du cercle *AMDBEA* soit tirée parallèlement aux droites *FAa*, *HDd*, *GMm*, &c. ou perpendiculairement au plan *ZV*, une droite *KCc*; & soit mené par cette droite un plan *HDdT* auquel le diamètre *AB* du cercle soit perpendiculaire : les parallèles *FL*, *ab* à ce diamètre seront perpendiculaires au même plan *HDdT*. Ainsi les trois lignes *AB*, *FL*, *ab* seront perpendiculaires aux trois lignes *DT*, *HT*, *dT* qu'elles rencontrent dans le plan *HDdT*; & réciproquement les droites *DT*, *HT*, *dT* seront perpendiculaires aux trois lignes *AB*, *FL*, *ab*.

Par l'une quelconque *GMm* des parallèles qu'on suppose perpendiculaires au plan *ZV*, soit mené un plan *GMmS* parallèle au plan *HDdT*: les rencontres *GS*, *MS*, *mS* de ce plan avec les trois plans *ZV*, *XV*, *YV* seront parallèles aux rencontres *HT*, *DT*, *dT* du plan parallèle *HDdT* avec les mêmes plans *ZV*, *XV*, *YV*, & par conséquent perpendiculaires aux trois droites *FL*, *AB*, *ab*. Enfin les rencontres *NPp*, *KCc* des mêmes plans parallèles *GMmS*, *HDdT* avec le plan *FBa*, seront parallèles; & par conséquent les droites parallèles *KN*, *CP*, *cp*, comprises entr'elles, seront égales.

Les droites *AB*, *FL*, *ab* étant égales, si on les imagine placées les unes sur les autres, elles conviendront parfaitement; & leurs parties *CP*, *KN*, *cp*, qui sont aussi égales, conviendront pareillement : en sorte que les droites *PM*, *NG*, *pm*, qu'on a démontré perpendiculaires aux droites *AB*, *FL*, *ab*, auront la même direction, & pourront être regardées comme les ordonnées correspondantes d'un cercle *AMDBEA*, & de deux courbes *FGHLIF*, *amdbea* décrites sur un même diamètre *AB*. Ainsi

pour démontrer que ces deux courbes sont des ellipses correspondantes au cercle $AMDBEA$, il suffit de démontrer que les ordonnées PM du cercle sont aux ordonnées correspondantes NG ou pm de ces courbes, comme l'axe AB commun au cercle & à ces courbes est à l'autre axe HI ou de de ces courbes.

Les droites NPp, GMm étant toutes deux parallèles à KCc, & par conséquent parallèles entr'elles, les droites MS, GS, mS seront coupées par NPp en parties proportionnelles; c'est-à-dire qu'on aura $PM : NG : pm :: PS : NS : pS$.

Les droites KCc, HDd, étant aussi parallèles, les droites DT, HT, dT seront aussi coupées en parties proportionnelles; c'est-à-dire qu'on aura $CT : KT : cT :: CD : KH : cd$.

Mais les droites AB, FL, ab étant parallèles à RV, les parallèles PS, CT seront égales, aussi-bien que les parallèles NS, KT, & que les parallèles pS, cT. Ainsi l'on aura $PM : NG : pm :: CD : KH : cd$; c'est-à-dire que

Chaque ordonnée PM *du cercle* AMDBEA,
Est à chaque ordonnée correspondante NG *ou* pm *des deux courbes* FGHLIF, amdbea,
Comme CD,
Est à KH *ou à* cd,
Ou { *Comme* 2 CD *ou* DE *ou* AB, *axe qui peut être commun au cercle & aux deux courbes*,
Est à 2 KH = HI *ou à* 2 cd = de. }

C. Q. F. D.

DÉFINITIONS.

127. Si l'on fait tourner une demi-ellipse aDb Fig. 84 & 85.

sur son petit axe ou sur son grand axe *a b*, le solide engendré par cette révolution sera nommé *Ellipsoïde* ou *Sphéroïde elliptique*; & ce sphéroïde sera *aplati* ou *alongé*, suivant que l'ellipse génératrice aura tourné sur son petit axe ou sur son grand axe.

Si sur le plan de l'ellipse on imagine un demi-cercle *A D B* qui ait pour rayon le demi-axe *C D* de l'ellipse, perpendiculaire à l'axe *a b* de révolution, ce demi-cercle *A D B* qui (*n*°. 106) sera correspondant à la demi-ellipse *a D b*, produira dans sa révolution une sphère qu'on nommera *Sphère correspondante du sphéroïde elliptique*.

Le demi-axe *C D* commun au cercle & à l'ellipse étant perpendiculaire à l'axe *A B* de révolution, produira un plan circulaire *D d E e D* auquel l'axe *A B* ou *a b* sera perpendiculaire; & comme ce plan circulaire divisera la sphère & le sphéroïde elliptique en deux parties égales, on le nommera *Équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde*.

Chaque perpendiculaire telle que *P M N* ou *p m n* menée à l'équateur, se nomme *Ordonnée* à ce plan; & ses parties *P M*, *P N*, ou *p m*, *p n*, terminées par la surface de la sphère & par celle de l'ellipsoïde, s'appellent *Ordonnées correspondantes* de la sphère & de l'ellipsoïde.

Corollaire I.

Fig. 84 & 85. 128. Donc si l'on coupe la sphère & l'ellipsoïde correspondant par un plan quelconque mené suivant l'axe *a b* de révolution, la section de l'ellipsoïde sera une ellipse divisée par l'axe *a b* en deux parties égales & semblables à la demi-ellipse génératrice *a D b*; & la section de la sphère sera un cercle correspondant

divisé par le même axe *AB* ou *ab* en deux parties égales & semblables au demi-cercle générateur *ADB*.

Car la demi-ellipse *aDb* génératrice de l'ellipsoïde, & le demi-cercle *ADB* générateur de la sphère, ont engendré dans leur révolution & formé sur leur figure, tous les plans *aDb*, *adb*, *aEb*, *aeb*; &c. de l'ellipsoïde, & tous ceux *ADB*, *AdB*, *AEB*, *AeB*, &c. de la sphère, qui peuvent être regardés comme des sections de ces deux solides jusqu'à leur axe *ab* ou *AB* de révolution. Ainsi chaque section de l'ellipsoïde suivant l'axe *ab*, est composée de deux demi-ellipses égales & semblables à la demi-ellipse génératrice *aDb*, & qui ont le même axe *ab*; & chaque section correspondante de la sphère suivant le même axe, est composée de deux demi-cercles égaux & semblables au demi-cercle générateur *ADB*, & qui ont un diamètre *AB* commun.

COROLLAIRE II.

129. Deux ordonnées correspondantes quelconques *PM*, *PN*, ou *pm*, *pn* de la surface de l'ellipsoïde & de celle de la sphère, étant dans une même ligne perpendiculaire sur l'équateur commun à ces deux solides, & par conséquent parallèles à l'axe *ab* de révolution, seront toûjours dans un même plan de section mené par l'axe *AB* ou *ab* de révolution; ainsi ces deux ordonnées correspondantes de la sphère & de l'ellipsoïde seront aussi des ordonnées correspondantes d'un cercle & d'une ellipse décrits sur un même axe égal au diamètre *DE* de l'équateur. Fig. 84 & 85.

Or (n°. 106) les ordonnées correspondantes d'un cercle & d'une ellipse décrits sur un même axe, sont

en même rapport que cet axe commun & l'autre axe de l'ellipse. Donc

Chaque ordonnée P M *ou* p m *de la sphère,*

Est à chaque ordonnée correspondante P N *ou* p n *de l'ellipsoïde,*

Comme l'axe ou le diamètre D E *de l'équateur commun à ces deux solides,*

Est à l'autre axe a b *de l'ellipsoïde.*

Il suit de là que deux ordonnées correspondantes de la sphère & de l'ellipsoïde sont proportionnelles à deux autres ordonnées correspondantes des mêmes solides.

COROLLAIRE III.

Fig. 84 & 85. 130. La sphère peut être considérée comme l'assemblage d'une infinité de filets ou d'ordonnées *P M*, *p m*, &c. perpendiculaires sur tous les points de l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde; & l'ellipsoïde peut être aussi regardé comme la somme d'une infinité de filets ou d'ordonnées correspondantes *P N*, *p n*, &c. perpendiculaires sur tous les points du même équateur.

Or en considérant ainsi la sphère & l'ellipsoïde, on verra évidemment qu'ils sont composés d'un même nombre de filets, ou d'ordonnées correspondantes chacune à chacune; & comme (*n*°. 129) les ordonnées correspondantes de la sphère & de l'ellipsoïde sont en même rapport que le diamètre *D E* de l'équateur commun à ces deux solides, & l'autre axe *a b* de l'ellipsoïde, & qu'elles sont par conséquent proportionnelles chacune à sa correspondante, il est clair qu'on aura cette proportion:

La

La somme des ordonnées qui composent la sphère, ou le solide de cette sphère;

Est à la somme des ordonnées qui composent l'ellipsoïde; ou au solide de l'ellipsoïde,

Comme l'axe ou le diamètre DE *de l'équateur commun à ces deux solides,*

Est à l'autre axe a b *de l'ellipsoïde.*

COROLLAIRE IV.

131. Si l'on coupe un sphéroïde aplati ou alongé par un plan *o p y*, & que de tous les points du contour de cette section l'on mène, perpendiculairement sur l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde, des ordonnées *o R*, *p T*, *y Z*, &c. qui, prolongées s'il est nécessaire, rencontrent la surface de la sphère correspondante en *O*, *P*, *Y*, &c. on a vû (*n°.* 129) qu'on aura $Ro : RO :: Tp : TP :: Zy : ZY ::$ &c. Ainsi (*n°.* 125) tous les points *O*, *P*, *Y* où la surface de la sphère sera rencontrée, se trouveront dans un même plan qui passera par la section commune du plan de l'équateur & du plan *o p y* suivant lequel on aura coupé l'ellipsoïde. Fig. 86 & 87.

Comme la section de la sphère par un plan est un cercle, & que tous les points *O*, *P*, *Y*, &c. où la surface de la sphère est rencontrée par les lignes parallèles *o R*, *p T*, *y Z*, &c. menées du bord de la section de l'ellipsoïde, sont dans un même plan; il est clair que tous ces points de rencontre *O*, *P*, *Y*, &c. forment sur la surface de la sphère la circonférence d'un cercle : d'où il suit (*n°.* 126) que le bord *o p y* de la section de l'ellipsoïde est une ellipse correspondante au cercle *O P Y*.

Corollaire V.

Fig. 86 & 87. 132. Puisque (n°. 131) le plan de section OPY de la sphère & le plan de section correspondant opy de l'ellipsoïde, concourent en une même ligne avec le plan de l'équateur; toutes les parallèles FXx, ROo, &c. rencontrées par ces plans, seront coupées proportionnellement (n°. 124); c'est-à-dire qu'on aura $FX : Fx :: RO : Ro$.

Mais ROo passant par les bords des sections correspondantes de la sphère & de l'ellipsoïde, RO & Ro seront ordonnées correspondantes de ces deux solides, & seront par conséquent (n°. 129) proportionnelles à deux autres ordonnées correspondantes FG, Fg des mêmes solides; c'est-à-dire qu'on aura $RO : Ro :: FG : Fg$.

Donc $FX : Fx :: FG : Fg$, ou $FG : Fg :: FX : Fx$; & par conséquent $FG - FX : Fg - Fx :: FG : Fg$. c'est-à-dire $GX : gx :: FG : Fg$.

Mais (n°. 129) $FG : Fg :: CA : Ca$ ou $:: DE : 2Ca$.

Donc $GX : gx :: DE : 2Ca$; c'est-à-dire que les filets correspondans GX, gx qui composent les segmens correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde, sont en même rapport que le diamètre DE de l'équateur commun à ces deux solides & l'autre axe $2Ca$ de l'ellipsoïde.

Et comme les deux segmens correspondans sont composés d'un même nombre de filets, puisqu'ils sont compris entre les mêmes parallèles perpendiculaires à leur équateur commun, il est évident qu'on aura cette proportion :

La somme des filets qui composent le segment sphérique, ou le solide de ce segment,

Est à la somme des filets qui composent le segment correspondant d'ellipsoïde, ou au solide de ce segment;

Comme l'axe D E *de l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde,*

Est à l'autre axe 2 C a *de l'ellipsoïde.*

COROLLAIRE VI.

133. Si l'on joint au segment sphérique le cone *COPY*, & au segment correspondant d'ellipsoïde le cone *Copy*, pour avoir un secteur sphérique & un secteur correspondant d'ellipsoïde, & que ces deux secteurs, dont les bords sont terminés par les mêmes droites *ROo*, *TPp*, *ZYy*, soient imaginés composés de filets élémentaires correspondans tels que *GV*, *gu* situés deux à deux dans une même droite *FGg* perpendiculaire à l'équateur commun; on verra évidemment que ces deux secteurs solides sont composés d'un même nombre de filets. Fig. 86 & 87.

Par le centre *C* commun à la sphère & à l'ellipsoïde, & par une droite quelconque *FGg* qui contient deux élémens correspondans *GV*, *gu* des deux secteurs correspondans, & qui est perpendiculaire à l'équateur commun, soit mené un plan *CKI* ou *CKi*: ce plan qui rencontrera le même équateur en *CK*, lui sera perpendiculaire: & si par le point *i*, où ce plan rencontrera le bord du secteur d'ellipsoïde, on mène *iK* parallèlement à *FGg*, cette ligne sera aussi perpendiculaire à l'équateur, & contiendra deux élémens correspondans *KI*, *Ki* de la sphère & de l'ellipsoïde.

Deux élémens ou filets correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde étant proportionnels à deux autres élémens ou filets correſpondans des mêmes ſolides, on aura $FG : Fg :: KI : Ki$.

Mais les droites parallèles KIi, FVu étant compriſes dans le même triangle KCI ou KCi, ſeront coupées proportionnellement par la droite Cui ou CVI, dans laquelle le plan de ce triangle rencontrera la ſurface conique du ſecteur ſphérique ou elliptique. Ainſi l'on aura $KI : Ki :: FV : Fu$.

On aura donc $FG : Fg :: FV : Fu$, & par conſéquent $FG - FV : Fg - Fu :: FG : Fg$, ou $GV : gu :: FG : Fg$; c'eſt-à-dire que deux élémens ou filets correſpondans des ſecteurs correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont proportionnels à deux élémens correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde, & par conſéquent auſſi proportionnels à l'axe DE de l'équateur commun & à l'autre axe $2Ca$ de l'ellipſoïde : d'où il ſuit néceſſairement que

La ſomme des élémens ou filets qui compoſent le ſecteur ſphérique, c'eſt-à-dire le ſolide de ce ſecteur,

Eſt à la ſomme des filets qui compoſent le ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, ou au ſolide de ce ſecteur;

Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt à l'autre axe 2 Ca *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE VII.

Fig. 86 & 87. **134.** Si l'on conſidère les momens des élémens ou filets correſpondans $\left\{ \begin{matrix} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde par rapport à un même

plan *BZ* parallèle à ces élémens, & par conſéquent perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, on trouvera que ces momens ſont proportionnels aux deux axes *DE* & 2 *Ca*.

Car les milieux ou centres de gravité des élémens correſpondans $\left\{\begin{matrix} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans ſeront à la même diſtance du plan *BZ*. Ainſi les momens de ces élémens, c'eſt-à-dire les produits de leurs longueurs & de leurs diſtances au plan *BZ*, ſeront proportionnels à leurs longueurs qui ſont elles-mêmes proportionnelles aux deux axes *DE*, 2 *Ca* : & comme il y a même nombre d'élémens dans les deux ſegmens ou ſecteurs correſpondans, on aura cette proportion :

La ſomme des momens de tous les élémens du ſegment ou du ſecteur ſphérique, c'eſt-à-dire le moment de ce ſegment ou de ce ſecteur conſidéré par rapport au plan BZ *perpendiculaire à l'équateur commun,*

Eſt à la ſomme des momens de tous les élémens du ſegment ou du ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, c'eſt-à-dire au moment de ce ſegment ou de ce ſecteur, relativement au même plan ;

Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt à l'autre axe 2 Ca *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE VIII.

135. Mais ſi l'on conſidère les momens des élémens ou filets correſpondans $\left\{\begin{matrix} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde par rapport à l'équateur *DMEND* commun à la ſphère & à Fig. 86 & 87.

l'ellipsoïde, on trouvera que ces momens sont proportionnels aux quarrés $\overline{DE}^2$ & $(2Ca)^2$ de l'axe de l'équateur commun & de l'autre axe de l'ellipsoïde.

Car on a trouvé $\left\{\begin{array}{l}(n^o.\ 132)\ FG : Fg :: GX : gx :: \frac{1}{2}GX : \frac{1}{2}gx \\ (n^o.\ 133)\ FG : Fg :: GV : gu :: \frac{1}{2}GV : \frac{1}{2}gu\end{array}\right\}$.

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} FG - \frac{1}{2}GX : Fg - \frac{1}{2}gx \\ FG - \frac{1}{2}GV : Fg - \frac{1}{2}gu\end{array}\right\} :: FG : Fg$ ou $:: DE : 2Ca$.

Multipliant ces proportions par ordre avec celles-ci $\left\{\begin{array}{l} GX : gx \\ GV : gu\end{array}\right\} :: DE : 2Ca$, chacune par sa correspondante,

on aura $\left\{\begin{array}{l} GX \times (FG - \frac{1}{2}GX) : gx \times (Fg - \frac{1}{2}gx) \\ GV \times (FG - \frac{1}{2}GV) : gu \times (Fg - \frac{1}{2}gu)\end{array}\right\} :: \overline{DE}^2 : (2Ca)^2$.

Or $\left\{\begin{array}{l} FG - \frac{1}{2}GX,\ Fg - \frac{1}{2}gx \\ FG - \frac{1}{2}GV,\ Fg - \frac{1}{2}gu\end{array}\right\}$ sont les distances de l'équateur commun $DMEND$ aux milieux ou centres de gravité des élémens correspondans $\left\{\begin{array}{l} GX, gx \text{ des segmens} \\ GV, gu \text{ des secteurs}\end{array}\right\}$ correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde.

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} GX \times (FG - \frac{1}{2}GX) \ \& \ gx \times (Fg - \frac{1}{2}gx) \\ GV \times (FG - \frac{1}{2}GV) \ \& \ gu \times (Fg - \frac{1}{2}gu)\end{array}\right\}$ sont les momens des élémens correspondans $\left\{\begin{array}{l} GX, gx \text{ des segmens} \\ GV, gu \text{ des secteurs}\end{array}\right\}$ correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde; & par conséquent les momens des élémens ou filets correspondans $\left\{\begin{array}{l} GX, gx \text{ des segmens} \\ GV, gu \text{ des secteurs}\end{array}\right\}$ correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde, étant considérés par rapport à l'équateur commun $DMEND$, sont proportionnels aux quarrés $\overline{DE}^2$, $(2Ca)^2$ de l'axe de l'équateur commun & de l'autre axe de l'ellipsoïde.

Enfin comme ces deux segmens ou secteurs correspondans sont composés d'un même nombre d'élémens proportionnels chacun à son correspondant, on aura cette proportion:

La somme des momens de tous les élémens ou filets qui composent le segment ou le secteur sphérique, c'est-à-dire le moment de ce segment ou de ce secteur relativement à l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde,

Est à la somme des momens de tous les élémens du segment ou du secteur correspondant d'ellipsoïde, c'est-à-dire au moment de ce segment ou de ce secteur par rapport au même équateur;

Comme le quarré $\overline{DE}^2$ *de l'axe de l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde,*

Est au quarré $(2Ca)^2$ *de l'autre axe de l'ellipsoïde.*

REMARQUE.

136. On remarquera que si l'on coupoit la sphère & l'ellipsoïde par un plan parallèle à leur axe de révolution ou perpendiculaire à l'équateur commun de ces deux solides, la section *MgN* de l'ellipsoïde seroit une ellipse correspondante à la section circulaire *MGN* de la sphère. Car les ordonnées *RO, FG, &c.* menées dans le plan circulaire de la section *MGN* de la demi-sphère, perpendiculairement à la rencontre *MN* de ce plan avec celui de l'équateur, étant perpendiculaires à cet équateur & terminées par la surface de la sphère, seront des ordonnées de la sphère; & les ordonnées correspondantes *Ro, Fg, &c.* de la section *MgN* de l'ellipsoïde étant terminées par sa surface, seront des ordonnées de ce solide: & comme toutes les ordonnées de la sphère sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes de l'ellipsoïde, il est clair que les ordonnées *RO, FG, &c.* du demi-cercle *MGN* seront proportionnelles aux ordonnées *Ro, Fg, &c.* de la courbe *MgN*. Ainsi (*n°.* 106) la Fig. 86 & 87.

courbe *MgN* est une demi-ellipse, & la section entière de l'ellipsoïde est une ellipse.

THÉOREME.

Fig. 86 & 87. 137. *Les centres de gravité* { H, h *de deux segmens* / L, l *de deux secteurs* } *correspondans de sphère & d'ellipsoïde sont dans une même droite* { QHh / SLl } *perpendiculaire à l'équateur* DMEND *commun à la sphère & à l'ellipsoïde.*

DÉMONSTRATION.

En considérant les momens des segmens & secteurs correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde relativement à un même plan *B Z* perpendiculaire à l'équateur commun, on a trouvé (*n°.* 134) que

Le moment du segment ou du secteur sphérique
Est au moment du segment ou secteur correspondant d'ellipsoïde,
Comme l'axe D E *de l'équateur commun*
Est à l'autre axe 2 C a *de l'ellipsoïde.*

On a trouvé aussi (*n°s.* 132 & 133) que

Le segment ou secteur de la sphère
Est au segment ou secteur correspondant de l'ellipsoïde,
Comme l'axe D E *de l'équateur commun*
Est à l'autre axe 2 C a *de l'ellipsoïde.*

Ainsi en divisant ces deux proportions par ordre, on aura

Le moment du segment ou secteur sphérique, divisé par ce segment ou par ce secteur,
Est au moment du segment ou secteur correspondant d'ellipsoïde, divisé par ce segment ou par ce secteur.

Comme l'axe DE *de l'équateur commun, diviſé par lui-même, c'eſt-à-dire comme l'unité,*

Eſt à l'autre axe 2 Ca *de l'ellipſoïde, diviſé par lui-même, ou à l'unité.*

Or les deux derniers termes de cette proportion étant égaux, les deux premiers le ſont auſſi.

Mais (*n°.* 61.) le premier terme, c'eſt-à-dire le moment du ſegment ou du ſecteur ſphérique, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au plan *B Z* relativement auquel on a conſidéré ce moment; & le ſecond terme, ſavoir le moment du ſegment ou du ſecteur d'ellipſoïde, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au même plan *B Z* par rapport auquel on a auſſi conſidéré ce moment.

Donc les centres de gravité $\left\{ \begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont à la même diſtance du plan *B Z* perpendiculaire à l'équateur commun, & ſont par conſéquent dans un même plan parallèle à ce plan *B Z*, ou perpendiculaire à l'équateur commun.

On démontrera de la même manière que les mêmes centres de gravité $\left\{ \begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans un ſecond plan parallèle à un nouveau plan *B Z* perpendiculaire à l'équateur, & ſont par conſéquent dans un ſecond plan perpendiculaire au même équateur.

Donc les centres de gravité $\left\{ \begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans la ſection commune de deux plans perpendiculaires à l'équateur, & ſe trouvent par conſéquent dans une

même droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

138. Donc ſi l'on veut avoir une ligne droite qui contienne le centre de gravité d'un ſegment ou d'un ſecteur quelconque d'ellipſoïde, il faudra imaginer ou conſtruire une ſphère qui ait un équateur commun avec cet ellipſoïde; puis par le moyen de quelques perpendiculaires tirées par le bord du ſegment ou du ſecteur ſur l'équateur commun, déterminer ſur la ſphère le ſegment ou le ſecteur correſpondant à celui de l'ellipſoïde; chercher enſuite (*nº.* 102 ou 98) le centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur ſphérique; & mener enfin par ce centre de gravité ſur l'équateur commun une perpendiculaire indéfinie qui contiendra néceſſairement le centre de gravité demandé du ſegment ou du ſecteur d'ellipſoïde.

THÉOREME.

Fig. 86 & 87. 139. *Si par le centre de gravité* $\left\{\begin{matrix} H \text{ du ſegment} \\ L \text{ du ſecteur} \end{matrix}\right\}$ *ſphérique on mène une droite indéfinie* $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ *perpendiculairement ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, & qu'on prenne ſur cette perpendiculaire, à commencer de l'équateur commun, une partie* $\left\{\begin{matrix} Qh \\ Sl \end{matrix}\right\}$ *telle que l'on ait cette proportion* $\left\{\begin{matrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{matrix}\right\}$ :: DE : 2Ca; *le point* $\left\{\begin{matrix} h \\ l \end{matrix}\right\}$ *ſera le centre de gravité du* $\left\{\begin{matrix} \text{ſegment} \\ \text{ſecteur} \end{matrix}\right\}$ *correſpondant de l'ellipſoïde.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \\ L, l \end{matrix}\right\}$ de deux $\left\{\begin{matrix} \text{fegmens} \\ \text{fecteurs} \end{matrix}\right\}$ correfpondans font dans une même droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ menée perpendiculairement fur l'équateur commun à la fphère & à l'ellipfoïde. Ainfi il refte feulement à démontrer que le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} h \text{ du fegment} \\ l \text{ du fecteur} \end{matrix}\right\}$ d'ellipfoïde eft placé dans la droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ de manière que $\left\{\begin{matrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{matrix}\right\} :: DE : 2Ca.$

En confidèrant les momens des fegmens & des fecteurs correfpondans de fphère & d'ellipfoïde relativement à l'équateur $DMEND$ commun à la fphère & à l'ellipfoïde, on a trouvé (n°. 135) que

Le moment du fegment ou du fecteur de la fphère
Eft au moment du fegment ou du fecteur correfpondant de l'ellipfoïde.

Comme le quarré $\overline{DE}^2$ *de l'axe de l'équateur commun à la fphère & à l'ellipfoïde.*
Eft au quarré $(2Ca)^2$ *de l'autre axe de l'ellipfoïde.*

On a vû auffi (n°s. 132 & 133) que

Le fegment ou le fecteur fphérique
Eft au fegment ou au fecteur correfpondant d'ellipfoïde.
Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la fphère & à l'ellipfoïde.*
Eft à l'autre axe 2 Ca *de l'ellipfoïde.*

Ainfi en divifant par ordre la première de ces deux proportions par la feconde, on aura cette nouvelle proportion;

Le moment du ſegment ou du ſecteur de la ſphère, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, c'eſt-à-dire la diſtance H Q *ou* L S *du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au plan de l'équateur commun, relativement auquel on conſidère les momens.*

Eſt au moment du ſegment ou du ſecteur correſpondant de l'ellipſoïde, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, c'eſt-à-dire à la diſtance h Q *ou* l S *du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au même équateur commun;*

Comme $\overline{DE}^2$ *diviſé par* D E, *ou comme* D E,

Eſt à $(2\,Ca)^2$ *diviſé par* $2\,Ca$, *c'eſt-à-dire à* $2\,Ca$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 86 & 87. 140. Puiſque les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont ſitués dans une même droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ perpendiculaire à l'équateur commun, de manière que $\left\{\begin{matrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{matrix}\right\} :: DE : 2Ca$; il eſt évident que ſi $\left\{\begin{matrix} QH \\ SL \end{matrix}\right\}$ devient nul, c'eſt-à-dire ſi le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} H \text{ du ſegment} \\ L \text{ du ſecteur} \end{matrix}\right\}$ ſphérique ſe confond avec le point $\left\{\begin{matrix} Q \\ S \end{matrix}\right\}$ de l'équateur commun, le terme $\left\{\begin{matrix} Qh \\ Sl \end{matrix}\right\}$ deviendra auſſi nul; c'eſt-à-dire que le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} h \text{ du ſegment} \\ l \text{ du ſecteur} \end{matrix}\right\}$ correſpondant de l'ellipſoïde ſe confondra avec le même point $\left\{\begin{matrix} Q \\ S \end{matrix}\right\}$ du plan de l'équateur. Ainſi les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpodans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſeront dans un même point de l'équateur commun.

COROLLAIRE II.

141. Lorſque les bords *GMFNG*, *gMfNg* des {ſegmens / ſecteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans un même plan perpendiculaire à celui de l'équateur commun, le {ſegment / ſecteur} ſphérique eſt coupé en deux parties égales & ſemblables par le plan de l'équateur ; ainſi ſon centre de gravité eſt dans ce plan. Donc (nº. 140) dans ce cas les deux {ſegmens / ſecteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde auront le même centre de gravité. Fig. 88 & 89.

Ainſi quand on voudra déterminer le centre de gravité d'un {ſegment / ſecteur} d'ellipſoïde dont le bord *gMfNg* ſera dans un plan perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, il faudra chercher le centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique correſpondant dont le bord *GMFNG* ſera néceſſairement dans un même plan perpendiculaire à l'équateur avec celui du {ſegment / ſecteur} d'ellipſoïde ; & ce centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique ſera celui du {ſegment / ſecteur} correſpondant de l'ellipſoïde.

Mais (nº. 102 / 98) on trouvera le centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique, en faiſant

$$\left\{\begin{matrix} CQ = \dfrac{\frac{1}{4}\overline{PE}^2}{CD - \frac{1}{3}PD} \\ CS = \frac{3}{8}PE. \end{matrix}\right\}$$

Ainſi l'on aura le centre gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} correſpondant d'ellipſoïde par le même moyen.

Et comme les lignes $\left\{\begin{matrix} CD,\ PD \\ PE \end{matrix}\right\}$ qui entrent dans la valeur de la diſtance $\left\{\begin{matrix} CQ \\ CS \end{matrix}\right\}$ du centre de la ſphère au centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique, ſont com-

munes à la ſphère & à l'ellipſoïde, il eſt évident qu'on trouvera le centre de gravité du $\left\{ \begin{matrix} \text{ſegment} \\ \text{ſecteur} \end{matrix} \right\}$ d'ellipſoïde dont le bord eſt dans un plan perpendiculaire à celui de l'équateur commun, ſans avoir recours au $\left\{ \begin{matrix} \text{ſegment} \\ \text{ſecteur} \end{matrix} \right\}$ ſphérique correſpondant.

COROLLAIRE III.

Fig. 90 & 91. 142. Lorſque les bords OPY, opy des $\left\{ \begin{matrix} \text{ſegmens} \\ \text{ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans des plans parallèles au plan $DMENDD$ de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, ces $\left\{ \begin{matrix} \text{ſegmens} \\ \text{ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans peuvent être engendrés par la révolution des $\left\{ \begin{matrix} \text{demi-ſegmens } AOY ; aoy \\ \text{ſecteurs } ACY ; acy \end{matrix} \right\}$ correſpondans du cercle & de l'ellipſe autour de l'axe AB ou ab perpendiculaire à l'équateur commun. Ainſi il eſt évident que les centres de gravité $\left\{ \begin{matrix} H, h \text{ de ces ſegmens} \\ L, l \text{ de ces ſecteurs} \end{matrix} \right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans le même axe AB ou ab de révolution, & que (*n°.* 139) ils ſont placés dans cet axe de manière que

$$\left\{ \begin{matrix} CH : Ch \\ CL : Cl \end{matrix} \right\} :: DE : ab, \text{ ou } :: CA : Ca.$$

COROLLAIRE IV.

Fig. 90 & 91. 143. Si l'on décrit un cercle $aFbGa$ qui ait pour diamètre l'axe ab ſur lequel la demi-ellipſe aDb a tourné pour engendrer l'ellipſoïde, la circonférence de ce cercle ſera rencontrée en V par l'ordonnée qo de l'ellipſe, prolongée s'il eſt néceſſaire, & les trois points C, V, O ſeront en ligne droite.

Car RO, Ro étant des ordonnées correſpondantes du cercle $ADBEA$ & de l'ellipſe $aDbEa$, on aura (*n°.* 106 ou 107) $RO : Ro$ ou $CQ : Cq :: DE : ab$.

Et qo, qV étant auſſi des ordonnées correſpon-

dantes de l'ellipse $aDbEa$ & du cercle $aVbXa$, on aura (n°. 106 ou 107) $DE : ab :: qo : qV$, ou $:: QO : qV$.

On aura donc $CQ : Cq :: QO : qV$. Ainsi les triangles CQO, CqV seront semblables : ce qui ne peut arriver que dans le cas où les trois points C, V, O sont en ligne droite.

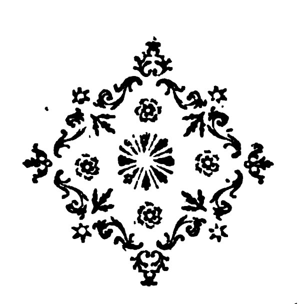
Les trois points C, V, O étant en ligne droite, les $\left\{\begin{matrix}\text{demi segmens } AOQ,\ aVq \\ \text{secteurs } ACO,\ aCV\end{matrix}\right\}$ des deux cercles $ADBEA$, $aVbXa$ seront semblables, & décriront par conséquent dans leur révolution sur l'axe AB ou ab des $\left\{\begin{matrix}\text{segmens} \\ \text{secteurs}\end{matrix}\right\}$ semblables de sphères dont les centres de gravité seront semblablement placés dans leurs rayons CA, Ca ; c'est-à-dire qu'en prenant $\left\{\begin{matrix}H, I \\ L, K\end{matrix}\right\}$ pour les centres de gravité de ces deux $\left\{\begin{matrix}\text{segmens} \\ \text{secteurs}\end{matrix}\right\}$ sphériques, on aura $\left\{\begin{matrix}CH : CI \\ CL : CK\end{matrix}\right\} :: CA : Ca$.

Mais on a trouvé dans le Corollaire précédent que les centres de gravité $\left\{\begin{matrix}H, h \text{ des segmens} \\ L, l \text{ des secteurs}\end{matrix}\right\}$ correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde sont placés dans le même axe AB ou ab de révolution, de manière que $\left\{\begin{matrix}CH : Ch \\ CL : Cl\end{matrix}\right\} :: CA : Ca$.

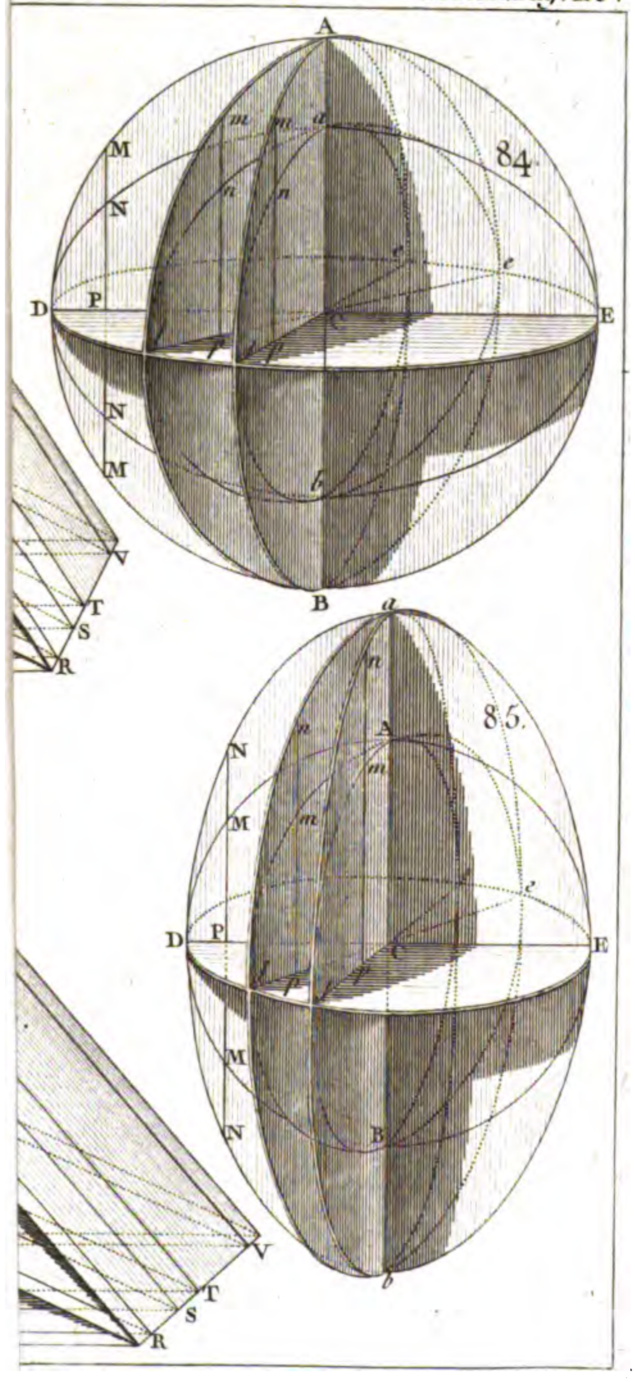
Donc $\left\{\begin{matrix}CH : CI :: CH : Ch \\ CL : CK :: CL : Cl\end{matrix}\right\}$: & comme les antécédens de ces proportions sont égaux, les conséquens le seront aussi ; c'est-à-dire qu'on aura $\left\{\begin{matrix}CI = Ch \\ CK = Cl\end{matrix}\right\}$: d'où il suit que le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}I \text{ du segment} \\ K \text{ du secteur}\end{matrix}\right\}$ sphérique qui a même flèche aq & même axe ab de révolution que le $\left\{\begin{matrix}\text{segment} \\ \text{secteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipsoïde, se confond avec le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}h \text{ de ce segment} \\ l \text{ de ce secteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipsoïde.

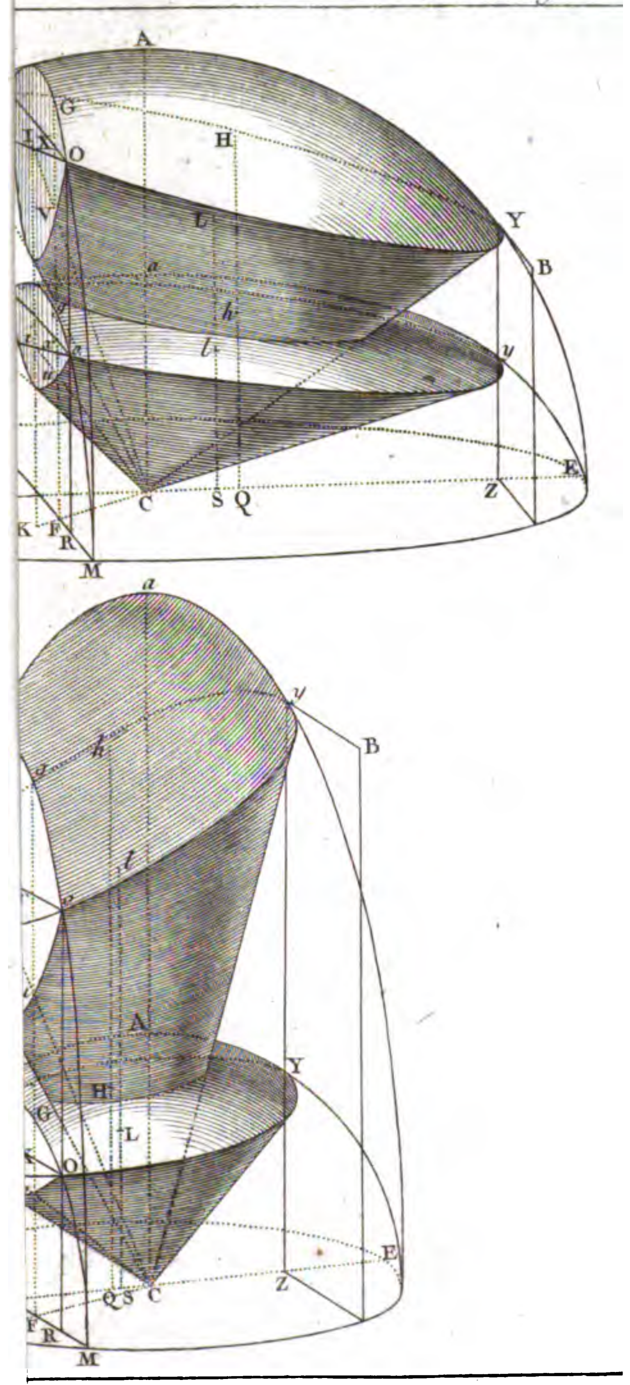
Or (*nos.* $\begin{smallmatrix}102\\98\end{smallmatrix}$) on trouvera le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} I \text{ du ſegment} \\ K \text{ du ſecteur}\end{matrix}\right\}$ ſphérique engendré par le $\left\{\begin{matrix} \text{demi-ſegment } aVq \\ \text{ſecteur } aCV\end{matrix}\right\}$ de cercle, en faiſant $\left\{\begin{matrix} CI = \dfrac{\frac{1}{4}\overline{bq}^2}{Ca - \frac{1}{3}aq} \\ CK = \frac{5}{8}bq\end{matrix}\right\}$; ainſi l'on aura le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} I \text{ ou } h \text{ du ſegment} \\ K \text{ ou } i \text{ du ſecteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipſoïde, engendré par la révolution du $\left\{\begin{matrix} \text{demi-ſegment } aoq \\ \text{ſecteur } aCo\end{matrix}\right\}$ correſpondant de l'ellipſe, par le même moyen.

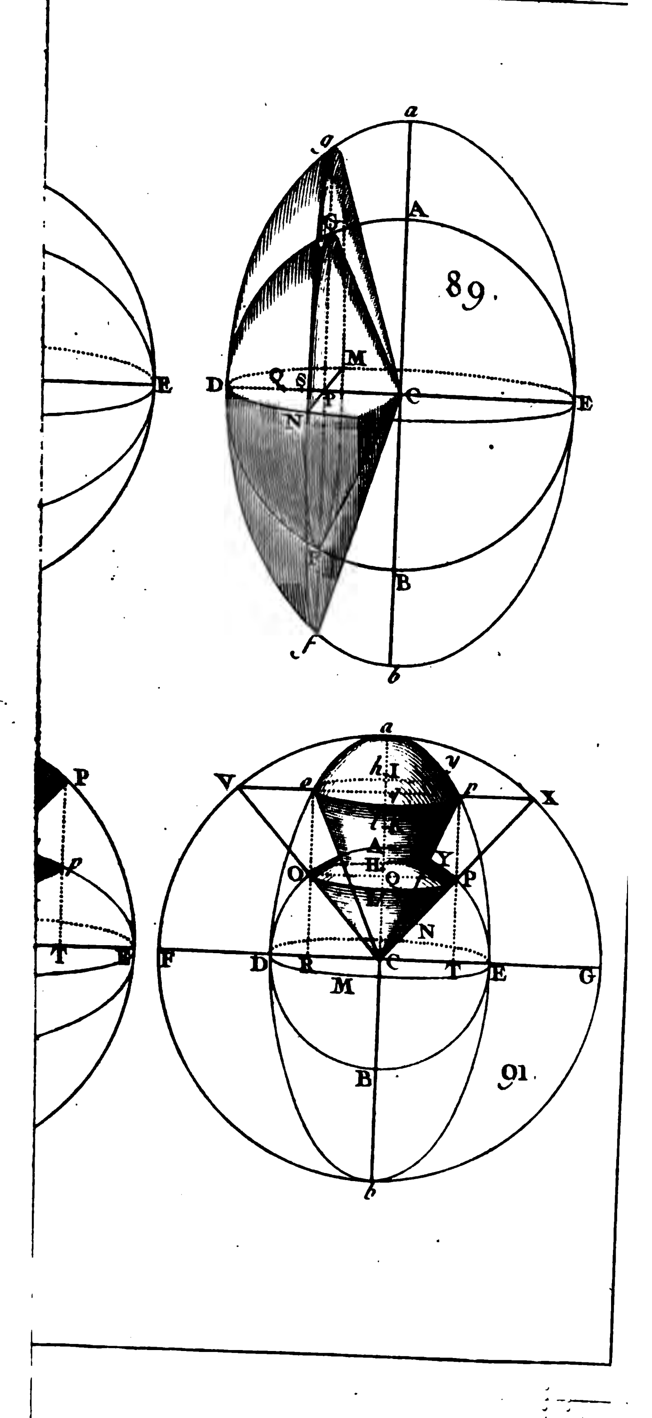
Et comme les lignes $\left\{\begin{matrix} Ca,\ aq \\ bq\end{matrix}\right\}$ qui entrent dans la valeur de la diſtance du centre *C* de la ſphère au centre de gravité $\left\{\begin{matrix} I \text{ ou } h \text{ du ſegment} \\ K \text{ ou } i \text{ du ſecteur}\end{matrix}\right\}$ ſphérique, ſont communes à la ſphère & à l'ellipſoïde, & aux parties correſpondantes de ces deux ſolides; il eſt évident qu'on trouvera le centre de gravité du $\left\{\begin{matrix} \text{ſegment} \\ \text{ſecteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipſoïde, engendré par la révolution d'un $\left\{\begin{matrix} \text{demi-ſegment } aoq \\ \text{ſecteur } aCo\end{matrix}\right\}$ d'ellipſe ſur l'un *ab* de ſes axes, ſans avoir recours au $\left\{\begin{matrix} \text{ſegment} \\ \text{ſecteur}\end{matrix}\right\}$ ſphérique correſpondant.



CHAPITRE VIII.


A
m
m
a
M
84.
N
n
n
e
e
D
P
E
p
p
N
M
b
B
V
T
S
R
a
n
85.
n
A
N
m
M
m
e
D
P
E
p
p
M
N
B
V
T
S
R
b


A
G
I
X
O
H
V
L
Y
a
B
h
l
y
E
C
S
Q
Z
K
F
R
M
a
y
B
h
d
l
A
Y
H
G
L
O
E
Q
S
C
Z
F
R
M


a
g
A
S
89.
M
D
Q
S
P
C
E
N
F
B
f
b
a
h
I
y
V
e
p
X
A
Y
O
H
O
P
N
F
D
R
C
T
E
G
M
B
91.
b
P
p
T
E

CHAPITRE VIII.

Du centre de gravité de la Parabole & du Paraboloïde.

DÉFINITIONS.

144. SOIENT deux droites indéfinies *BZ*, *Ee* qui se coupent perpendiculairement en *A*, & soit fait *AB* de telle grandeur qu'on voudra. Fig. 91.

Que l'on décrive avec des rayons plus grands que la moitié de *AB*, tant des cercles *BCPc*, *BDQd*, *BERe* qu'on voudra, lesquels ayent leurs centres dans la droite *BZ*, & qui passent tous par le même point. *B* : chacune des circonférences coupera la droite *Ee* en deux points ; savoir la première en *C*, *c*, la seconde en *D*, *d*, la troisième en *E*, *e*.

Maintenant si par les points *P*, *Q*, *R*, &c. où les mêmes circonférences coupent la droite *AZ*, on tire les droites *Mm*, *Nn*, *Oo*, &c. parallèles à *Ee*, c'est-à-dire perpendiculaires sur *BZ*, & que l'on fasse *PM* & *Pm* = *AC*, *QN* & *Qn* = *AD*; *RO* & *Ro* = *AE*, &c. la courbe *ONMAmno* qui passera par le point *A* & par tous les points *O*, *N*, *M*, *m*, *n*, *o* sera nommée *Parabole*, & le point *A* s'appellera *Sommet* de la parabole.

La droite *AZ* se nommera *Axe* de la parabole.

Les droites *MP*, *NQ*, *OR*, &c. s'appelleront *Ordonnées* ou *Appliquées* des points *M*, *N*, *O*, &c. & les droites *AP*, *AQ*, *AR*, &c. se nommeront *Abscisses* ou *Coupées* des mêmes points *M*, *N*, *O*, &c. de la parabole.

La droite AB se nommera *Paramètre*.

Une *Abscisse* AR & une ordonnée RO d'un même point O s'appellent *Coordonnées*.

Corollaire I.

Fig. 92. 145. 1°. Donc le quarré de l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole est égal au produit de son abscisse & du paramètre.

Car $\overline{PM}^2$ ou $\overline{AC}^2 = AP \times AB$

$\overline{QN}^2$ ou $\overline{AD}^2 = AQ \times AB$

$\overline{RO}^2$ ou $\overline{AE}^2 = AR \times AB$.

2°. Donc l'abscisse d'un point quelconque est égale au quarré de son ordonnée, divisé par le paramètre; c'est-à-dire $AP = \frac{\overline{PM}^2}{AB}$, $AQ = \frac{\overline{QN}^2}{AB}$, $AR = \frac{\overline{RO}^2}{AB}$, &c.

Corollaire II.

Fig. 92. 146. Donc les quarrés des ordonnées PM, QN, RO, &c. de la parabole, sont proportionnels aux abscisses AP, AQ, AR, &c. de ces ordonnées.

Car puisque (n°. 145) $\left\{ \begin{array}{l} \overline{PM}^2 = AP \times AB \\ \overline{QN}^2 = AQ \times AB \\ \overline{RO}^2 = AR \times AB \end{array} \right\}$ on aura

$\overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 : \overline{RO}^2 :: AP \times AB : AQ \times AB : AR \times AB :: AP : AQ : AR$.

Théoreme.

Fig. 92. 147. *Si par le sommet* A *de la parabole on mène une perpendiculaire* E e *à l'axe* A Z, *& que par deux points quelconques* M, N *de la parabole, infiniment près l'un de*

l'autre, on tire deux ordonnées MP, NQ *perpendiculaires à l'axe, & deux autres droites* MC, ND *perpendiculaires à la droite* Ee; *le petit espace* PMNQ *sera double du petit espace* CMND.

DÉMONSTRATION.

Les points M, N étant infiniment proches, le petit arc MN de la parabole pourra être regardé comme une ligne droite; & si par le milieu H de cette petite droite on mène HK perpendiculaire à AZ, & HI perpendiculaire à Ee, on aura l'espace $PMNQ = HK \times PQ$, & l'espace $CMND = HI \times CD$. Il faut donc démontrer que $HK \times PQ = 2HI \times CD$.

$$AQ \times AB = \overline{QN}^2; \quad AP \times AB = \overline{PM}^2.$$

Ainsi $(AQ - AP) \times AB$ ou $PQ \times AB = \overline{QN}^2 - \overline{PM}^2$.

Mais $\overline{QN}^2 - \overline{PM}^2 = (QN + PM) \times (QN - PM)$.

Donc $PQ \times AB = (QN + PM) \times (QN - PM) = 2HK \times CD$.

Multipliant par HK, & divisant ensuite par AB, on aura $PQ \times HK = \frac{2\overline{HK}^2 \times CD}{AB}$.

Mais $\overline{HK}^2 = AK \times AB$; & par conséquent $\frac{\overline{HK}^2}{AB} = AK = HI$ ou $\frac{2\overline{HK}^2}{AB} = 2HI$.

Donc $PQ \times HK = 2HI \times CD$; c'est-à-dire que le petit trapèze $PMQN$ compris dans la parabole, est double du petit trapèze correspondant $CMND$ extérieur à la parabole. C. Q. *F. D.*

COROLLAIRE.

148. Donc un espace quelconque ARO compris entre l'arc AO de parabole, l'ordonnée RO & Fig. 92.

l'abſciſſe *A R*, eſt double de l'eſpace correſpondant *A E O*; & comme les deux eſpaces *A R O*, *A E O* compoſent enſemble un rectangle égal au produit $AR \times RO$, l'eſpace parabolique *A R O* ſera les deux tiers du produit $AR \times RO$.

Car ſi l'on imagine que les eſpaces *A R O*, *A E O* ſont compoſés d'une infinité de petits trapèzes tels que *P M N Q* & *C M N D* correſpondans chacun à chacun, chaque petit trapèze *P M N Q* de l'eſpace *A R O* ſera double de chaque petit trapèze correſpondant *C M N D* de l'eſpace *A E O*. Ainſi la ſomme des petits trapèzes *P M N Q*, c'eſt-à dire l'eſpace *A R O*, ſera double de la ſomme des petits trapèzes *C M N D*, c'eſt-à-dire de l'eſpace *A E O*; & par conſéquent l'eſpace parabolique *A R O* ſera les deux tiers du rectangle *R E* ou du produit $AR \times RO$.

Comme on aura auſſi l'eſpace *A R o* double de l'eſpace *A e o*, & par conſéquent l'eſpace *A R o* égal aux deux tiers du rectangle *A R o e*, il eſt clair que l'eſpace *O A o* compris entre la parabole & une corde *O o* perpendiculaire à l'axe, eſt les deux tiers du rectangle *E O o e* ou du produit $AR \times Oo$.

Remarque.

Fig. 93. 149. Lorſqu'une parabole *O a B* eſt coupée par une corde *O o* oblique à ſon axe *a Z*, & que l'on mène par le milieu *R* de cette corde une droite *A R* parallèle à l'axe *a Z*, on démontre dans les Traités des ſections coniques que toutes les cordes *M m*, *N n* de la parabole, qui ſont parallèles à *O o*, ſont coupées en deux parties égales par la droite *A R* qu'on nomme le *Diamètre* de ces cordes, en ſorte que le ſegment parabolique *O a o* eſt coupé en deux parties

égales, mais non semblables, par le diamètre *A R.*

On démontre encore dans les mêmes Traités, qu'après avoir tiré, par l'extrémité *A* du diamètre *A R*, une droite *E A e* parallèle à la corde *O o*, si par deux points quelconques *M*, *N* de la parabole, on mène vers le diamètre *A R* deux droites *M P*, *N Q* parallèles à la corde *O o*, & vers la droite *E A e* deux autres droites *M C*, *N D* parallèles au diamètre *A R*, le trapèze *P M N Q* sera double du trapèze correspondant *C M N D*; d'où il suit que si l'on tire les droites *O E*, *o e* parallèles au diamètre *A R*, les aires des demi-segmens paraboliques égaux *A R O*, *A R o* seront doubles des triangles mixtilignes correspondans *A E O*, *A e o* extérieures à la parabole, & seront par conséquent les deux tiers des deux parallélogrammes égaux *A R O E*, *A R o e.*

Comme ces propriétés (que nous avons démontrées pour les segmens paraboliques dont les cordes sont perpendiculaires à l'axe de la parabole, & que nous ne démontrons point pour les segmens dont les cordes sont obliques au même axe) suffisent pour établir la théorie des centres de gravité de toutes sortes de segmens paraboliques; les deux Théorèmes suivans seront relatifs à deux figures, l'une pour les segmens paraboliques dont les cordes seront perpendiculaires à l'axe de la parabole, l'autre pour les segmens dont les cordes seront obliques au même axe.

THÉOREME.

150. 1°. *Les momens des deux espaces paraboliques correspondans* A R O, A E O *sont égaux, lorsqu'on les considère par rapport à l'axe ou au diamètre* A R *de la parabole.* Fig. 92 & 93.

2°. *Lorsque l'on considère les momens des mêmes espaces relativement à la droite* A E *menée par le sommet de la parabole parallèlement à la corde* O o, *le moment de l'espace* A R O *est quadruple du moment de l'espace correspondant* A E O.

Démonstration.

Les côtés *P M*, *C M* des élémens correspondans *P Q N M*, *C M N D* des deux espaces paraboliques *A R O*, *A E O* étant infiniment peu différens des côtés opposés *Q N*, *D N* qui leur sont parallèles les centres de gravité *F*, *G* de ces deux élémens seront dans les milieux de leurs largeurs & de leurs longueurs moyennes *H K*, *H I*. Ainsi la distance *F K* du centre de gravité *F* à l'axe ou au diamètre *A R*, sera la moitié de la distance *G L* du centre de gravité *G* au même axe ou diamètre; & réciproquement la distance *F V* du centre de gravité *F* à la droite *A E*, sera double de la distance *G I* du centre de gravité *G* à la même droite *A E*; c'est-à-dire qu'on aura $\left\{ \begin{array}{l} FK : GL :: 1 : 2 \\ FV : GI :: 2 : 1. \end{array} \right.$

Mais (nos 147 & 149) l'élément *P Q N M* est double de l'élément correspondant *C M N D*; c'est-à-dire que $PQNM : CMND :: 2 : 1$.

Donc si l'on multiplie cette dernière proportion par ordre avec chacune des deux précédentes, on aura

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ.\ PQNM \times FK : CMND \times GL :: 1 : 1 \\ 2^\circ.\ PQNM \times FV : CMND \times GI :: 4 : 1 \end{array} \right\} \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ.\ PQNM \times FK = CMND \times GL \\ 2^\circ.\ PQNM \times FV = 4 CMND \times GI; \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que 1°. le moment de chaque élément *P Q N M* de l'espace *A R O* relativement à l'axe ou au diamètre *A R*, est égal au moment de l'élément correspondant *C M N D* de l'autre espace paraboli-

que ; & par conséquent la somme des momens de tous les élémens qui composent l'espace parabolique *ARO*, ou le moment de cet espace par rapport à l'axe ou au diamètre *AR* de la parabole, est égale à la somme des momens de tous les élémens correspondans qui composent l'espace *AEO*, ou au moment de cet espace relativement au même axe ou diamètre *AR*. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Le moment de chaque élément *PQNM* de l'espace *ARO* relativement à la droite *AE*, est quadruple du moment de l'élément correspondant *CMND* par rapport à la même ligne ; & par conséquent la somme des momens de tous les élémens de l'espace *ARO*, ou le moment de cet espace relativement à la droite *AE*, est quadruple de la somme des momens des élémens de l'espace correspondant *AEO* où du moment de cet espace par rapport à la même ligne *AE*. *C. Q. F.* 2°. *D.*

THÉOREME.

151. *La corde* Oo *étant coupée en deux parties égales par l'axe* AR *ou par le diamètre* AR *parallèle à l'axe* aZ *de la parabole, les droites* OE, oe *étant aussi parallèles au même axe, & la droite* Ee *menée par l'extrémité* A *du diamètre ou de l'axe étant parallèle à la corde* Oo ; *si des centres de gravité* P, S *des deux espaces paraboliques correspondans* ARO, AEO *l'on mène des parallèles* PF, SH *à la corde* Oo, *& des parallèles* PI, SL *à l'axe de la parabole, on aura* Fig. 94 & 95.

1°. $PF = \frac{3}{8} RO$, $SH = \frac{3}{4} RO$

2°. $PI = \frac{3}{5} AR$, $SL = \frac{3}{10} AR$.

DÉMONSTRATION.

Du centre de gravité Q du rectangle $AROE$ soit menée une parallèle QG à la corde Oo, & une parallèle QK à l'axe ou diamètre AR. La somme des momens des deux espaces paraboliques ARO, AEO qui composent le rectangle $AROE$ étant égale au moment de ce rectangle ;

1°. Si l'on considère relativement à l'axe AR les momens de ces espaces & du rectangle qui en est le système, on aura $ARO \times PF + AEO \times SH = AROE \times QG$. Mais on vient de voir que $ARO \times PF = AEO \times SH$, & par conséquent

$$ARO \times PF + AEO \times SH = 2\,ARO \times PF \text{ ou } 2\,AEO \times SH.$$

Ainsi l'on aura $\left\{ \begin{array}{c} 2\,ARO \times PF \\ \text{ou } 2\,AEO \times SH \end{array} \right\} = AROE \times QG.$

Mais (*n°.* 148.) $ARO = \frac{2}{3} AROE$, $AEO = \frac{1}{3} AROE$ ou $2\,ARO = \frac{4}{3} AROE$, $2\,AEO = \frac{2}{3} AROE$, & $QG = \frac{1}{2} RO$.

Donc $\left\{ \begin{array}{c} \frac{4}{3} AROE \times PF \\ \text{ou } \frac{2}{3} AROE \times SH \end{array} \right\} = AROE \times \frac{1}{2} RO$,

& $\left\{ \begin{array}{c} \frac{4}{3} PF \\ \text{ou } \frac{2}{3} SH \end{array} \right\} = \frac{1}{2} RO$, ou $\left\{ \begin{array}{c} 4\,PF \\ \text{ou } 2\,SH \end{array} \right\} = \frac{3}{2} RO$;

d'où l'on déduira $PF = \frac{3}{8} RO$, & $SH = \frac{3}{4} RO$. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Si l'on considère par rapport à la droite AE les momens des mêmes espaces paraboliques ARO, AEO, & celui de leur système ou du rectangle $AROE$, on aura

$$ARO \times PI + AEO \times SL = AROE \times QK.$$

Mais (*n°.* 150) $ARO \times PI = 4\,AEO \times SL$,

ou $ARO \times PI + AEO \times SL = \left\{ \begin{array}{c} 5\,AEO \times SL \\ \text{ou } \frac{5}{4} ARO \times PI \end{array} \right\}$.

$$\text{Donc} \left\{ \begin{matrix} 5AEO \times SL \\ \text{ou } \tfrac{5}{4}ARO \times PI \end{matrix} \right\} = AROE \times QK.$$

Or $AEO = \frac{1}{3}AROE$, & $ARO = \frac{2}{3}AROE$; ou $5AEO = \frac{5}{3}AROE$, & $\frac{5}{4}ARO = \frac{5}{6}AROE$, & $QK = \frac{1}{2}AR$.

$$\text{Donc} \left\{ \begin{matrix} \tfrac{5}{3}AROE \times SL \\ \text{ou } \tfrac{5}{6}AROE \times PI \end{matrix} \right\} = AROE \times \tfrac{1}{2}AR.$$

& $\left\{ \begin{matrix} \tfrac{5}{3}SL \\ \text{ou } \tfrac{5}{6}PI \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}AR$; d'où l'on tirera $SL = \frac{3}{10}AR$, & $PI = \frac{3}{5}AR$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE I.

152. Puisque les droites PF, SH menées des centres de gravité P, S des deux espaces paraboliques correspondans ARO, AEO, vers l'axe ou diamètre AR parallèlement à la corde Oo, sont telles que AF ou $PI = \frac{3}{5}AR$, $PF = \frac{3}{8}RO$, & AH ou $SL = \frac{3}{10}AR$, $SH = \frac{3}{4}RO$; il est évident que Fig. 94 & 95.

1°. Si l'on prend sur l'axe ou diamètre AR, à commencer du sommet A, une partie $AF = \frac{3}{5}AR$, & que l'on mène par le point F parallèlement à la corde Oo une droite $FP = \frac{3}{8}RO$, le point P où se terminera cette perpendiculaire sera le centre de gravité de l'espace parabolique ARO compris entre l'arc AO & les deux coordonnées AR, RO.

2°. Si l'on prend sur l'axe ou diamètre AR, à commencer du sommet A, une partie $AH = \frac{3}{10}AR$, & que l'on mène par le point H parallèlement à la corde Oo une droite $HS = \frac{3}{4}RO$, le point S sera le centre de gravité de l'espace parabolique extérieur AEO.

Corollaire II.

Fig. 94 & 95. 153. Donc si l'on prend sur l'axe ou diamètre AR, à commencer du sommet A, une partie $AF = \frac{3}{5} AR$, & une partie $AH = \frac{3}{10} AR$, le point F sera le centre de gravité du segment parabolique OAo compris entre la parabole & sa corde Oo, & le point H sera le centre de gravité du système des deux espaces extérieurs égaux AEO, Aeo. Car les deux espaces paraboliques ARO, ARo, placés des deux côtés de l'axe AR, étant composés d'élémens correspondans égaux chacun à chacun, & les deux espaces paraboliques AEO, Aeo étant aussi composés d'élémens correspondans égaux chacun à chacun; il est évident que si les droites PF, SH menées des centres de gravité des deux espaces paraboliques ARO, AEO parallèlement à la corde Oo, sont prolongés en p, s au-delà de l'axe ou du diamètre AR, de manière que $Fp = FP$ & $Hs = HS$, les points p, s seront les centres de gravité des deux espaces ARo, Aeo. Ainsi le centre de gravité du système des deux espaces égaux ARO, ARo, ou du segment parabolique OAo, sera au milieu de la droite Pp, c'est-à-dire au point F; & le centre de gravité du système des deux espaces AEO, Aeo sera au milieu de la droite Ss, c'est-à-dire au point H. Or les points F, H sont placés dans l'axe AR de manière que $AF = \frac{3}{5} AR$, & $AH = \frac{3}{10} AR$.

Théoreme.

Fig. 96. 154. *Le centre de gravité* P *d'un sphéroïde parabolique produit par la révolution d'un demi-segment parabolique* A R O *compris entre un arc* A O *de parabole,*

son axe AR *& son ordonnée* RO, *est situé dans l'axe* AR *de manière que* $AP = \frac{2}{3} AR$.

DÉMONSTRATION.

Le sphéroïde parabolique est composé de lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK*, *HL*, *IM*, *&c.* de la parabole, & dont les centres de figure & de gravité sont dans l'axe *AR*. Ainsi le centre de gravité du système de tous ces élémens circulaires, c'est-à-dire celui du sphéroïde parabolique, est un point *P* du même axe *AR*; & il reste seulement à démontrer que $AP = \frac{2}{3} AR$.

Toutes les lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK*, *HL*, *IM*, *&c.* sont proportionnelles aux quarrés $\overline{GK}^2$, $\overline{HL}^2$, $\overline{IM}^2$, *&c.* de ces ordonnées.

Mais en supposant que *AB* est le paramètre de la parabole, on trouve (*n°.* 146)

$\overline{GK}^2 : \overline{HL}^2 : \overline{IM}^2 : \&c. :: AG : AH : AI : \&c.$

Ainsi toutes les lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK*, *HL*, *IM*, *&c.* de la parabole, & qui composent le sphéroïde parabolique, sont proportionnelles à leurs abscisses *AG*, *AH*, *AI*, *&c.* c'est-à-dire aux parties de la droite *AR* comprises entre ces lames & le sommet *A*; & comme les centres de gravité particuliers de toutes ces lames sont dans la droite *AR*, il suit du n°. 37 que le centre de gravité de leur système, c'est-à-dire celui du sphéroïde parabolique, est un point *P* pris dans la droite *AR* de manière que $AP = \frac{2}{3} AR$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

155. Si ce Volume avoit été précédé d'un Traité des sections coniques, on auroit démontré que si Fig. 97.

l'on coupe un sphéroïde parabolique par un plan *O Q o* oblique à l'axe *a Z* de ce sphéroïde ou de la demi-parabole génératrice *A Z O*, la section sera une ellipse, & que toutes les sections *O Q o*, *D E d*, &c. obliques à l'axe *a Z* & parallèles entr'elles, seront des ellipses semblables dont tous les axes homologues *O o*, *D d*, &c. seront dans un même plan *O A B* passant par l'axe *a Z* de la parabole, & dont tous les centres *R*, *C*, &c. seront dans un même diamètre *A R* de la parabole, c'est-à-dire dans une même droite *A R* parallèle à l'axe *a Z* de la parabole. On auroit encore démontré que les quarrés des ordonnées parallèles *R O*, *C D*, &c. qui sont les demi-diamètres de ces ellipses semblables, sont proportionnels à leurs abscisses *A R*, *A C*, &c. & comme les surfaces des ellipses semblables sont proportionnelles aux quarrés de leurs axes homologues *O o*, *D d*, &c. ou de leurs demi axes correspondans *R O*, *C D*, &c. les surfaces des mêmes ellipses parallèles sont aussi proportionnelles aux abscisses *A R*, *A C*, &c.

On pourra donc supposer qu'un tronc de sphéroïde parabolique coupé par un plan *O Q o* oblique à son axe *a Z*, est composé d'une infinité de lames elliptiques semblables, telles que *O Q o*, *D E d*, &c. qui ont leurs centres de figure ou leurs centres de gravité dans une même droite *A R*, & qui sont proportionnelles aux parties de cette ligne droite comprises entre ces lames & le commencement des élémens. Ainsi (nº. 37) si l'on prend une partie $AP = \frac{2}{3} AR$ sur la droite *A R* menée par le centre *R* de la base elliptique du tronc de sphéroïde parabolique *A O Q o A* parallèlement à l'axe *a Z*, le point *P* sera le centre de gravité de ce tronc.

93.

95.

97

CHAPITRE IX.

Des mouvemens des centres de gravité.

THÉOREME.

156. *LORSQUE les centres de gravité particuliers de deux corps* A, C *se meuvent uniformément suivant deux lignes droites, si le centre de gravité de leur systême se meut, il décrit uniformément une ligne droite.* Fig. 98 & 99.

DÉMONSTRATION.

Supposons que les droites AB, CD, qui peuvent être ou ne pas être dans un même plan, soient celles que les centres de gravité particuliers des deux corps A, C doivent parcourir uniformément dans le même temps, en partant des deux points A, C.

Si l'on tire les droites AC, BD, & qu'on les divise proportionnellement, l'une en P, l'autre en R, de manière que l'on ait $C : A :: \left\{\begin{matrix} AP : PC \\ BR : RD \end{matrix}\right\}$, le point P sera (*n°.* 56) le centre de gravité du systême des deux corps A, C au moment qu'ils commenceront à décrire les deux droites AB, CD, & le point R sera le centre de gravité du systême des mêmes corps, au moment que leurs centres de gravité particuliers achèveront de parcourir les deux droites AB, CD. Ainsi il faut démontrer que si l'on tire la droite PR, le centre de gravité du systême des deux corps A, C sera continuellement dans cette ligne, & la décrira uniformément.

Supposons d'abord que le centre de gravité du corps A ait parcouru sur AB une partie AE, telle

que l'on ait *A E* : *E B* :: *A P* : *P C*, ou :: *C* : *A*, & soient tirées les deux droites *B C*, *E P*; ces deux lignes seront parallèles (*Géom. n°.* 250.), & les deux triangles *A E P*, *A B C* seront semblables.

Puisque (*hyp.*) les centres de gravité particuliers des deux corps *A*, *C* doivent décrire uniformément dans le même temps les deux droites *A B*, *C D*, ils parcourront dans le même temps des parties proportionnelles de ces lignes. Ainsi pendant que le centre de gravité du mobile *A* parcourra sur *A B* une partie *A E*, celui du mobile *C* parcourra sur *C D* une partie *C H* telle que l'on aura *C D* : *C H* :: *A B* : *A E*, ou :: *A C* : *A P* ou :: *B D* : *B R*; & par conséquent si l'on tire la droite *R H*, elle sera aussi parallèle à *B C*, & les deux triangles *B D C*, *R D H* seront semblables.

Les deux droites *E P*, *R H* étant parallèles à *B C*, seront parallèles entr'elles, & par conséquent dans un même plan. Ainsi quand même les deux droites *A B*, *C D* décrites par les centres de gravité des deux mobiles *A*, *C*, ne seroient pas dans un même plan, si l'on tire la droite *P R*, cette ligne & la droite *E H* qui joindront les extrémités des deux parallèles *E P*, *R H* seront dans un même plan, & se couperont par conséquent en quelque point *Q*, & les deux triangles *E P Q*, *H R Q* seront semblables.

Les triangles semblables *AEP*, *ABC* donneront } *E P* : *B C* :: *A E* : *A B*.

Les triangles semblables *BDC*, *RDH* donneront } *BC* : *RH* :: *CD* : *HD* ou :: *AB* : *EB*.

Ainsi multipliant ces deux proportions par ordre, on aura *EP* : *RH* :: *AE* : *EB*, ou (*constr.*) :: *AP* : *PC* :: *C* : *A*.

Mais les triangles semblables EPQ, HRQ donneront $EQ : QH :: EP : RH$.

On aura donc aussi $EQ : QH :: C : A$; & par conséquent (*n°.* 56.) le point Q, où la droite PR coupe la droite EH qui joint les centres de gravité des deux mobiles A, C au moment qu'ils arrivent aux points correspondans E, H, est le centre de gravité du systême de ces deux corps.

Les mêmes triangles semblables EPQ, HRQ donneront encore $PQ : QR :: EP : RH$; & comme on vient de trouver $EP : RH :: AE : EB$, on aura $PQ : QR :: AE : EB$, & *componendo* $PR : PQ :: AB : AE$.

Si l'on considère maintenant les deux parties AE, CH, que les centres de gravité particuliers des corps A, C ont parcouruës en même temps, comme les lignes entières que ces mobiles devoient parcourir, & qu'ayant pris sur ces deux droites AE, CH des parties AG, CK telles que l'on ait $\left\{\begin{matrix} AG : GE \\ CK : KH \end{matrix}\right\} :: AP : PC$ ou $:: C : A$, l'on tire la droite GK; on démontrera de la même manière que cette ligne & la droite PQ ou PR seront dans un même plan, & que le point T où ces deux lignes se rencontreront, sera le centre de gravité du systême des deux corps A, C arrivés en même temps en G & K; enfin l'on fera voir que $PT : PQ :: AG : AE$.

Et si l'on regarde les deux parties EB, HD qui restent à parcourir, comme les lignes droites entières que les mobiles A, C doivent décrire, & qu'ayant pris sur ces lignes des parties EF, HI telles que l'on ait $\left\{\begin{matrix} EF : FB \\ HI : ID \end{matrix}\right\} :: EQ : QH$, ou $:: C : A$, l'on tire la droite FI; on prouvera aussi de la même manière

que les deux lignes *FI*, *QR* ou *PR* sont dans un même plan; que le point *S* où elles se coupent est le centre de gravité du système des deux mobiles arrivés en même temps en *F*, *I*; & que *QS* : *SR* :: *EF* : *FB*.

Enfin comme chacune des nouvelles parties parcourues, ou qui resteront à parcourir en même temps, pourront toûjours être prises pour des lignes entières que les mobiles ont décrites ou doivent décrire ; & que les centres des mobiles, après avoir parcouru des parties de ces lignes qui soient aux parties restantes dans le rapport de *C* à *A*, seront toûjours joints par une ligne droite qui coupera la droite *PR* en un point qui sera le centre de gravité des deux mobiles ; on conclurra de là que le centre de gravité du système de deux corps *A*, *C* mûs uniformément le long de deux lignes droites *AB*, *CD* est continuellement dans une même droite *PR* : & comme on prouvera toûjours en même temps que les parties *PQ*, *PT*, *QS*, *&c.* parcourues par le centre de gravité du système sur la droite *PR*, sont proportionnelles aux parties correspondantes *AE*, *AG*, *EF*, *&c.* que le centre de gravité du mobile *A* parcourt uniformément sur la droite *AB*, il est évident que le centre de gravité du système des deux mobiles *A*, *C* parcourra uniformément la droite *PR*, pendant que les centres de gravité particuliers de ces deux mobiles décriront uniformément les deux droites *AB*, *CD* situées ou non situées dans un même plan. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 100 & 101. 157. Donc si les centres de gravité particuliers de

de tant de corps qu'on voudra *A*, *B*, *C*, *D*, &c. décrivent uniformément des lignes droites *A E*, *B H*, *C L*, *D O*, &c. situées ou non situées dans un même plan, parallèles ou non parallèles entr'elles, le centre de gravité du systême de tous ces corps parcourra aussi uniformément une ligne droite *M N*.

Car les centres de gravité particuliers des deux premiers corps *A* & *B* parcourant uniformément les droites *A E*, *B H*, on vient de voir que le centre de gravité de leur systême, que nous supposerons placé en *F*, parcourra uniformément une ligne droite *F G*.

Or toutes les parties d'un systême pouvant être considérées comme réunies à leur centre de gravité commun, on pourra regarder les deux mobiles *A* & *B* comme un seul corps ($A + B$) dont le centre de gravité *F* décrit une ligne droite *F G*. Ainsi pendant que le centre de gravité *F* de ce corps $A + B$, & celui du corps suivant *C*, parcourront uniformément les lignes droites *F G*, *C L*, le centre de gravité *I* de leur systême décrira aussi uniformément une ligne droite *I K*.

Les deux corps ($A + B$) & *C*, c'est-à-dire les trois corps *A*, *B*, *C* pouvant être regardés comme les parties d'un seul corps ($A + B + C$) réunies à son centre de gravité *I*; pendant que le centre de gravité *I* de ce corps parcourra la droite *I K*, & que celui *D* du corps suivant parcourra la droite *D O*, le centre de gravité *M* du systême de ces deux corps, c'est-à-dire celui des quatre corps *A*, *B*, *C*, *D*, parcourra uniformément une ligne droite *M N*: & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

Fig. 98 & 99. 158. Si les droites *A B, C D* parcourues par les centres de gravité des deux corps *A, C*, sont dans un même plan, la droite *P R* décrite par le centre de gravité du système de ces deux corps, sera aussi dans le même plan. Car les deux droites *A B, C D* étant dans un même plan, les deux autres *A C, B D* qu'on mènera par leurs extrémités, seront aussi dans un même plan avec elles ; & toute droite menée par deux points des deux lignes *A C, B D* sera encore dans le même plan.

Or le centre de gravité du système des deux corps *A, C*, au moment qu'ils commencent à décrire les deux droites *A B, C D*, est un point de la droite *A C*; & le centre de gravité du système des mêmes corps, au moment qu'ils achèvent de parcourir les deux mêmes droites, est un point de la droite *B D*: & l'on a prouvé (*n°*. 156) que le centre de gravité du système de ces deux corps suit uniformément la droite *P R*. Donc la droite parcourue par le centre de gravité du système des deux mobiles *A & C*, est dans un même plan avec les deux droites *A B, C D* décrites par les centres particuliers de ces deux mobiles.

COROLLAIRE III.

Fig. 102 & 103. 159. Si les deux droites *A B, C D*, décrites uniformément par les centres de gravité particuliers des deux mobiles *A & C*, sont parallèles & par conséquent dans un même plan, la droite *P R* décrite par le centre de gravité du système sera située avec elles dans un même plan, comme on vient de le démontrer, & leur sera parallèle.

Car le point P étant le centre de gravité du système des deux corps A & C lorsque ces corps partent des deux points A, C, & R étant le centre de gravité du système des mêmes corps lorsqu'ils arrivent en B, D, on aura $A+C : C :: AC : AP :: BD : BR$; & *alternando* $AP : BR :: AC : BD$. Mais les droites AC, BD étant prolongées, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point G, & la droite AB étant supposée parallèle à CD, on aura (*Géom. n°.* 246) $AC : BD :: AG : BG$. Ainsi l'on aura $AP : BR :: AG : BG$; & par conséquent (*Géom. n°.* 250) la droite PR décrite par le centre de gravité du système des deux mobiles A, C, sera parallèle à la droite AB décrite par le mobile A.

COROLLAIRE IV.

160. Donc si les centres de gravité particuliers A, B, C, D, &c. de tant de corps qu'on voudra, décrivent des lignes droites AE, BH, CL, DO, &c. parallèles entr'elles, situées ou non situées dans un même plan, la droite MN, que décrira le centre de gravité du système de tous ces corps, sera parallèle aux droites parcourues par leurs centres de gravité particuliers. Fig. 101.

Car supposant que F soit le centre de gravité commun aux deux premiers mobiles A, B, ce centre de gravité décrira une droite FG parallèle à AE.

Les deux corps A, B étant considérés comme un seul corps ($A+B$) réuni au centre de gravité F de leur système, & I étant supposé le centre de gravité d'un nouveau système composé des deux corps ($A+B$) & C; ce centre de gravité I décrira une

droite IK parallèle à CL, & par conséquent parallèle à AE.

Par la même raison, si l'on considère les trois corps A, B, C comme un seul corps $(A + B + C)$ réuni à leur centre de gravité commun I, & que M soit le centre de gravité d'un nouveau système composé des deux corps $(A + B + C)$ & D; ce centre de gravité M décrira encore une droite MN parallèle à DO, & par conséquent aussi parallèle à AE; & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

Fig. 104 & 105. 161. Si les centres de gravité particuliers A, E de deux mobiles décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de deux polygones semblables $ABCD$, $EFGH$, & qu'on tire des lignes droites indéfinies AE, BF, CG, DH, &c. par les angles ou points correspondans de ces polygones; on déduira aisément du Corollaire III, que le centre de gravité N du système de ces deux mobiles décrira aussi uniformément le contour d'un troisième polygone $NOPQ$ dont les côtés seront parallèles à ceux des deux premiers polygones, & terminés par les droites AE, BF, CG, DH, &c.

Mais les polygones semblables $ABCD$, $EFGH$ ayant les côtés homologues proportionnels & parallèles chacun à chacun, toutes les droites AE, BF, CG, DH menées par leurs angles correspondans, concourront en un même point X. Car les deux côtés AB, BC du premier polygone qui partent d'un même point B de la droite BX, étant parallèles & proportionnels aux deux côtés correspondans EF,

FG du ſecond polygone qui partent auſſi d'un même point *F* de la droite *BX*; les deux droites *AE*, *CG* prolongées, s'il eſt néceſſaire, concourront en un même point *X* avec la droite *BF* ou ſon prolongement (*Géom. n°.* 264). Par la même raiſon les droites *BF*, *DH* concourront auſſi au même point *X* avec la droite *CG*; & ainſi des autres. Ainſi les polygones *ABCDX*, *NOPQX*, *EFGHX* ſeront compoſés de triangles ſemblables, & ſeront par conſéquent ſemblables (*Géom. n°.* 269).

Si un troiſième mobile *I* décrivoit uniformément un troiſième polygone *IKLM* ſemblable à l'un *ABCD* des polygones précédens, & dont les côtés *IK*, *KL*, *LM* fuſſent proportionnels & parallèles aux côtés homologues *AB*, *BC*, *CD*; ce nouveau polygone ſeroit auſſi ſemblable au polygone *NOPQ* décrit par le centre de gravité *N* du ſyſtème des deux premiers mobiles *A*, *E*, & ſes côtés ſeroient auſſi proportionnels & parallèles aux côtés du même polygone *NOPQ*. Ainſi conſidérant les deux premiers mobiles *A*, *E* comme un ſeul corps réuni au centre de gravité *N* de leur ſyſtème, on prouvera, comme on a fait pour deux ſimples corps, que le centre de gravité *R* du ſyſtème compoſé des deux corps $(A + E)$, *I*, ou des trois corps *A*, *E*, *I*, décrira un polygone *RSTV* qui ſera ſemblable au polygone *IKLM*, & qui aura les côtés parallèles à ceux de ce polygone.

Donc ſi les centres de gravité *A*, *E*, *I* de trois mobiles décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de trois polygones ſemblables *ABCD*, *EFGH*, *IKLM*, le centre de gravité *R* du ſyſtème de ces trois corps

décrira aussi uniformément & dans le même temps les côtés homologues d'un quatrième polygone *R S T V* qui sera semblable aux trois premiers, & qui aura ses côtés proportionnels & parallèles à leurs côtés homologues.

On démontrera de la même manière que si les centres de gravité particuliers de quatre ou cinq, ou de tant de corps qu'on voudra, décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues d'autant de figures semblables dont les côtés correspondans soient parallèles chacun à chacun, le centre de gravité du système de tous ces corps décrira aussi uniformément & dans le même temps le contour d'un autre polygone dont les côtés seront parallèles aux côtés homologues des premiers.

COROLLAIRE VI.

162. Les courbes semblables pouvant être regardées comme des polygones semblables d'une infinité de côtés, il suit du Corollaire précédent que si les centres de gravité particuliers de tant de corps qu'on voudra, décrivent uniformément & dans le même temps des courbes semblables dont les parties homologues soient parallèles chacune à chacune, & que tous les mobiles partent des points homologues de ces courbes; le centre de gravité du système de tous ces corps décrira aussi uniformément & dans le même temps une courbe qui sera semblable à celles que décriront les centres de gravité particuliers, & dont toutes les parties seront parallèles aux parties homologues de ces courbes.

On doit remarquer que ce Corollaire & le précédent seront toûjours vrais, lors même que chacune des cour-

bes ou chacun des polygones que les centres de gravité particuliers des mobiles décriront, ne sera pas dans un même plan ; & qu'il suffit que toutes les parties correspondantes de ces courbes ou de ces polygones soient proportionnelles & parallèles chacune à chacune.

REMARQUE.

163. Lorsque deux corps *A*, *C* se meuvent uniformément en sens contraires suivant deux droites parallèles *AB*, *CD*, & sont réciproquement proportionnels à ces parallèles que leurs centres de gravité particuliers décrivent en même temps; le centre de gravité du système de ces deux corps demeure en repos. Fig. 106.

Car les deux droites *AB*, *CD*, que décrivent les centres de gravité particuliers des deux corps *A*, *C*, étant parallèles; si l'on tire une droite *AC* par les centres de gravité de ces deux corps au moment qu'ils commencent à parcourir les deux droites *AB*, *CD*, & que l'on tire aussi une droite *BD* par les centres de gravité des mêmes corps au moment qu'ils achèvent de parcourir les mêmes lignes, les deux droites *AC*, *BD* se couperont en quelque point *P*, & les deux triangles *APB*, *CPD* seront semblables; ainsi l'on aura $\left\{ \begin{matrix} PA : PC \\ PB : PD \end{matrix} \right\} :: AB : CD.$

Mais (*hyp.*) les deux droites *AB*, *CD* étant réciproquement proportionnelles aux deux mobiles *A*, *C*, on aura $AB : CD :: C : A$.

On aura donc aussi $\left\{ \begin{matrix} PA : PC \\ PB : PD \end{matrix} \right\} :: C : A$; & par conséquent (*n°.* 56) le même point *P* sera le centre de gravité du système des deux corps *A*, *C* au moment que leurs centres de gravité particuliers commence-

ront à décrire les deux droites *AB*, *CD*, & au moment qu'ils achèveront de parcourir les mêmes lignes.

Si l'on tire encore par le même point *P* tant de droites *EH*, *FK*, *&c.* qu'on voudra; on a vû (*Géom. n°.* 262) que toutes les parties *AE*, *EF*, *FB*, *&c.* de la droite *AB* seront proportionnelles aux parties *CH*, *HK*, *KD*, *&c.* de la droite *CD*. Ainsi puisque (*hyp.*) les centres de gravité particuliers des deux corps *A*, *C* doivent parcourir uniformément dans le même temps les deux droites *AB*, *CD*, & doivent par conséquent parcourir en même temps des parties proportionnelles de ces lignes; le corps *A* parcourra les parties *AE*, *EF*, *FB*, *&c.* de la droite *AB*, pendant que le corps *C* décrira les parties correspondantes *CH*, *HK*, *KD*, *&c.* de la droite *CD*; & par conséquent les deux corps *A*, *C* se trouveront dans les mêmes instans aux points correspondans *E*, *H* & *F*, *K*, *&c.*

Mais à cause des parallèles *AB*, *CD*, les triangles *APE*, *APF*, *&c.* seront semblables aux triangles *CPH*, *CPK*, *&c.* & donneront $\left\{\begin{matrix} PE : PH \\ PF : PK \end{matrix}\right\} :: PA : PC$; & l'on vient de voir que $PA : PC :: C : A$.

On aura donc $\left\{\begin{matrix} PE : PH \\ PF : PK \end{matrix}\right\} :: C : A$; & par conséquent (*n°.* 56) le point *P* sera encore le centre de gravité du systême des deux corps *A*, *C* arrivés en même temps aux points correspondans quelconques *E*, *H* & *F*, *K* des lignes qu'ils doivent parcourir.

Ainsi dans quelque position que se trouvent les deux corps *A*, *C*, dont les centres de gravité particuliers décrivent uniformément & en sens contraires deux droites parallèles *AB*, *CD* réciproquement

proportionnelles aux poids de ces corps, le centre de gravité du ſyſtème de ces mêmes corps ſera conſtamment au point *P*, & demeurera par conſéquent immobile.

Le ſyſtème de deux corps *M*, *N*, dont les centres de gravité particuliers décrivent uniformément des lignes droites *M O*, *N Q*, pouvant être regardé comme un ſeul corps dont le centre de gravité *A* décrit uniformément une ligne droite *A B*; il eſt évident que ſi le centre de gravité *A* du ſyſtème de deux corps *M*, *N*, & celui d'un troiſiéme corps *C*, décrivent uniformément en ſens contraires & en même temps deux lignes droites parallèles *A B*, *C D* réciproquement proportionnelles aux poids de ces corps, le centre de gravité du ſyſtème de ces trois corps ſera conſtamment en un même point *P*, & demeurera par conſéquent immobile. Fig. 107.

Il en ſera de même ſi le centre de gravité du ſyſtème d'un plus grand nombre de corps, & celui d'un nouveau corps ou du ſyſtème de pluſieurs corps, décrivent uniformément en ſens contraires & en même temps deux droites parallèles réciproquement proportionnelles aux poids de ces ſyſtèmes : le centre de gravité du ſyſtème général reſtera conſtamment en un même point *P*, & demeurera par conſéquent immobile.

164. Il ſuit de cette Remarque & du dernier Théorème joint à ſes Corollaires, que ſi les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps ſe meuvent uniformément ſuivant des lignes droites ſituées ou non ſituées dans un même plan, le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira auſſi uniformément une ligne droite, ou demeurera en repos.

THÉOREME.

165. *Lorsque les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps se meuvent uniformément suivant des lignes droites parallèles entr'elles, & que le centre de gravité de leur système général se meut par conséquent aussi uniformément suivant une ligne parallèle à celle que décrit le centre de gravité particulier de chaque corps;*

1°. *Si tous les mobiles vont d'un même côté, le produit fait de la somme de tous ces mobiles, multipliée par la droite que décrit le centre de gravité de leur système général, est égal à la somme des produits particuliers faits de chaque corps & de la ligne droite que décrit son centre de gravité particulier.*

2°. *Si tous les mobiles ne vont pas d'un même côté, le produit fait de la somme de tous ces corps, multipliée par la droite que décrit le centre de gravité de leur système général, est égal à la différence qu'il y a entre la somme des produits particuliers faits de chacun des corps qui vont d'un même côté, multiplié par la ligne que décrit le centre de gravité de ce corps, & la somme des produits faits de chacun des corps qui vont du côté opposé, multiplié par le chemin que parcourt le centre de gravité de ce corps.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 101. PARTIE I. Supposons que *AE*, *BH*, *CL*, *DO*, &c. soient les droites parallèles décrites uniformément par les centres de gravité particuliers des corps *A*, *B*, *C*, *D*, &c. qu'on suppose aller d'un même côté, & que la droite *MN* parallèle aux premières soit le chemin parcouru uniformément par le centre de

gravité du systême général de tous les mobiles A, B, C, D, &c. il faut démontrer qu'on aura $(A+B+C+D\ \&c.)\times MN = A\times AE + B\times BH + C\times CL + D\times DO + \&c.$

Lorsque les deux premiers corps A, B auront parcouru les deux premières parallèles AE, BH, & que leur centre de gravité commun F situé dans la droite AB qui joint les centres de gravité de ces deux corps, aura parcouru une troisième parallèle FG terminée par une droite EH menée par les centres de gravité des mêmes corps au moment qu'ils arriveront en E, H; les produits $A\times AE$, $B\times BH$ & $(A+B)\times FG$ seront (*n°.* 61) les momens des deux corps A, B & de leur systême $A+B$ situés en E, H, G, relativement à AB considéré comme l'axe perpendiculaire ou oblique de ces momens. Ainsi (*n°.* 64) l'on aura $(A+B)\times FG = A\times AE + B\times BH$.

Regardons maintenant les deux corps A, B comme un premier corps $(A+B)$ dont le centre de gravité F parcourt uniformément la droite FG, pendant qu'un second corps C décrit uniformément la parallèle CL. Lorsque les deux corps $(A+B)$, C auront parcouru les deux parallèles FG, CL, & que leur centre de gravité commun I situé dans la droite FC aura parcouru une troisième parallèle IK terminée par la Droite GL qui joindra les centres de gravité des deux corps $(A+B)$ & C au moment qu'ils arriveront en G, L; les produits $(A+B)\times FG$, $C\times CL$, & $(A+B+C)\times IK$ seront les momens des deux corps $(A+B)$, C, & de leur systême, relativement à la droite FC considérée comme l'axe perpendiculaire ou oblique de ces momens. Ainsi l'on aura (*n°.* 64) $(A+B+C)\times IK = (A+B)\times FG + C\times CL$.

Mais on vient de trouver $(A+B)\times FG = A\times AE + B\times BH$.
On aura donc aussi $(A+B+C)\times IK = A\times AE + B\times BH + C\times CL$.

Les trois premiers corps A, B, C pouvant être regardés comme un premier corps $(A+B+C)$ dont le centre de gravité I décrit uniformément la droite IK, pendant qu'un second corps D parcourt uniformément la parallèle DO; lorsque les deux corps $(A+B+C)$ & D auront parcouru les deux parallèles IK, DO, & que leur centre de gravité commun M premièrement situé dans la droite ID aura parcouru une troisième parallèle MN, les produits $(A+B+C)\times IK$, $D\times DO$, $(A+B+C+D)\times MN$ feront les momens des deux corps $(A+B+C)$, D, & celui de leur système $(A+B+C+D)$ relativement à la droite ID; ainsi (*n*°. 64) l'on aura $(A+B+C+D)\times MN = (A+B+C)\times IK + D\times DO$.

Mais on vient de trouver que } $(A+B+C)\times IK = A\times AE + B\times BH + C\times CL$.

Donc on aura aussi } $(A+B+C+D)\times MN = A\times AE + B\times BH + C\times CL + D\times DO$.

C. Q. F. 1°. D.

Fig. 103. PARTIE II. Supposons que le corps A, dont le centre de gravité parcourt uniformément la droite AB, représente le système de tous les corps qui décrivent des parallèles à AB dans le même sens que le corps A se meut suivant AB: le produit $A\times AB$ représentera le produit fait de la somme de tous les mobiles qui vont d'un même sens, multipliée par le chemin du centre de gravité du système de tous ces mobiles; ainsi (*Partie I.*) ce produit $A\times AB$ sera égal à la somme des produits particuliers faits de chacun de ces mobiles multiplié par le chemin que décrit son centre de gravité.

Imaginons que le corps C, dont le centre de gra-

vité se meut du côté opposé suivant la droite CD parallèle à AB, est le système de tous les corps qui se meuvent dans le même sens que le corps C suivant des parallèles à CD ou à AB: il est clair que $C \times CD$ sera le produit de la somme de tous les mobiles qui se meuvent suivant des directions contraires, multipliée par le chemin du centre de gravité de tous ces nouveaux mobiles; ainsi (*Partie I.*) ce produit sera égal à la somme des produits particuliers faits de chacun de ces mobiles multiplié par la ligne que décrira son centre de gravité.

Enfin supposons que P est le centre de gravité du système général $(A + C)$ de tous les mobiles qui se mouvront les uns dans un sens, les autres dans un autre, & que PR est le chemin parcouru par ce centre de gravité : il est évident que la démonstration de la seconde partie du Théorème se réduit à prouver que $(A + C) \times PR = A \times AB - C \times CD$.

Soit tirée la droite AC par les centres de gravité des deux systèmes particuliers A, C, au moment qu'ils commencent à décrire en sens contraires les deux parallèles AB, CD, & soit menée la droite BD par les centres de gravité des mêmes systèmes particuliers, au moment qu'ils achèveront de parcourir les mêmes parallèles AB, CD. On a ci-devant démontré que la droite PR, décrite par le centre de gravité P du système général, sera parallèle aux deux droites AB, CD, & terminée par les deux droites AC, BD.

Soit menée par le point P parallèlement à BD la droite EPF qui coupera AB en E & le prolongement de CD en F. Les trois parallèles BE, DF, PR comprises entre les parallèles BD, EF seront

égales; ainsi l'on aura $AE = AB - PR$, & $CF = CD + PR$; de plus les triangles APE, CPF seront semblables & donneront $AE : CF :: PA : PC$, c'est-à-dire $AB - PR : CD + PR :: PA : PC$.

Mais P étant le centre de gravité des deux systèmes A & C, on aura $PA : PC :: C : A$.

On aura donc aussi $AB - PR : CD + PR :: C : A$; & par conséquent $A \times AB - A \times PR = C \times CD + C \times PR$.

Ajoûtant à chaque membre $A \times PR - C \times CD$, on aura $A \times AB - C \times CD = A \times PR + C \times PR = (A + C) \times PR$. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 104 & 105. 166. Lorsque les centres de gravité particuliers de plusieurs corps A, I, E, &c. décrivent uniformément dans le même temps les côtés homologues de plusieurs polygones semblables $ABCD$, $IKLM$, $EFGH$, &c. & que les côtés homologues de ces polygones sont parallèles chacun à chacun, en sorte que (n°. 161) le centre de gravité R du système des mobiles décrive aussi uniformément dans le même temps les côtés d'un autre polygone semblable $RSTV$ parallèles aux côtés homologues des premiers :

Fig. 104. 1°. Si tous les mobiles A, I, E, &c. vont d'un même côté ; le produit fait de la somme de tous ces mobiles, multipliée par le contour du polygone que décrit le centre de gravité de leur système général, est égal à la somme des produits faits de chaque mobile multiplié par le contour du polygone qui décrit le centre de gravité particulier de ce mobile ; c'est-à-dire que $(A + I + E \&c) \times RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM + E \times EFGH + \&c.$

Fig. 105. 2°. Si tous les mobiles ne vont pas d'un même cô-

té; le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles, multipliée par le contour du polygone que décrit le centre de gravité de leur ſyſtème général, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits faits de chacun des mobiles qui vont d'un même côté, multiplié par le contour du polygone que décrit ſon centre de gravité, & la ſomme des produits faits de chacun des autres corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par le contour du polygone que décrit le centre de gravité particulier de ce corps. Par exemple, ſi deux corps A, I décrivent les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de deux polygones ſemblables $ABCD$, $IKLM$ en allant du même ſens, & qu'un troiſième corps E décrive en ſens contraire les côtés homologues d'un troiſième polygone ſemblable $EFGH$, parallèles aux côtés homologues des deux premiers, en ſorte que le centre de gravité R du ſyſtème de ces trois corps décrive auſſi dans le même temps les côtés homologues d'un quatrième polygone $RSTV$ qui ſeront parallèles aux côtés homologues des trois premiers polygones; on aura $(A+E+I) \times RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM - E \times EFGH$.

Car puiſque les premiers côtés AB, IK, EF, RS décrits en même temps par les mobiles A, I, E, & par leur centre de gravité commun R, ſont parallèles, on aura

$$(\text{fig. } 104)\ (A+I+E) \times RS = \left\{ \begin{array}{r} A \times AB \\ +I \times IK \\ +E \times EF \end{array} \right\},$$

$$\&\ (\text{fig. } 105)\ (A+I+E) \times RS = \left\{ \begin{array}{r} A \times AB \\ +I \times IK \\ -E \times EF \end{array} \right\}.$$

Et puiſque les ſeconds côtés BC, KL, FG, ST

décrits en même temps par les mêmes mobiles A, I, E, & par leur centre de gravité commun R, sont parallèles, on aura aussi

$$(\text{fig. } 104)\ (A+I+E)\times ST=\left\{\begin{matrix} A\times BC \\ +I\times KL \\ +E\times FG \end{matrix}\right\},$$

$$\&\ (\text{fig. } 105)\ (A+I+E)\times ST=\left\{\begin{matrix} A\times BC \\ +I\times KL \\ -E\times FG \end{matrix}\right\}.$$

On aura par la même raison,

$$(\text{fig. } 104)\ (A+I+E)\times TV=\left\{\begin{matrix} A\times CD \\ +I\times LM \\ +E\times GH \end{matrix}\right\},$$

$$\&\ (\text{fig. } 105)\ (A+I+E)\times TV=\left\{\begin{matrix} A\times CD \\ +I\times LM \\ -E\times GH \end{matrix}\right\}.$$

Et ainsi des autres.

Donc ajoûtant ensemble toutes ces égalités, on aura

$$(\text{fig. } 104)\ (A+I+E)\times(RS+ST+TV)=\left\{\begin{matrix} A\times(AB+BC+CD) \\ +I\times(IK+KL+LM) \\ +E\times(EF+FG+GH) \end{matrix}\right\},$$

c'est-à-dire $(A+I+E)\times RSTV=A\times ABCD+I\times IKLM+E\times EFGH$.

$$\text{Et (fig. } 105)\ (A+I+E)\times RS+ST+TV=\left\{\begin{matrix} A\times(AB+BC+CD) \\ +I\times(IK+KL+LM) \\ -E\times(EF+FG+GH) \end{matrix}\right\},$$

c'est-à-dire $(A+I+E)\times RSTV=A\times ABCD+I\times IKLM-E\times EFGH$.

COROLLAIRE II.

167. Les cercles & toutes les courbes semblables pouvant être regardés comme des polygones semblables d'une infinité de côtés; il est évident que lorsque plusieurs corps décriront en même temps & uniformément des parties homologues & parallèles chacune à chacune de cercles ou de courbes semblables, &

& que (n°. 162) le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira par conſéquent uniformément dans le même temps des parties homologues & parallèles d'un autre cercle ou d'une autre figure ſemblable :

1°. Si tous les mobiles vont d'un même ſens, le produit fait de la ſomme de ces mobiles multipliée par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité du ſyſtème de ces mobiles, eſt égal à la ſomme des produits faits de chaque mobile multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe que décrit ſon centre de gravité.

2°. Si tous les mobiles ne vont pas d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles multipliée par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité de leur ſyſtème, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits faits de chacun des corps qui vont d'un même côté, multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité de ce corps, & la ſomme des produits faits de chacun des autres corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe que décrit le centre de gravité de ce corps.

COROLLAIRE III.

168. Les lignes, les ſuperficies & leurs parties pouvant être conſidérées comme des poids proportionnels aux étendues de ces lignes ou de ces ſuperficies & de leurs parties ; il eſt évident que ſi les centres de gravité particuliers de toutes les parties d'une ligne ou d'une ſuperficie décrivent en même temps ou des lignes droites parallèles, ou les côtés

homologues parallèles chacun à chacun d'autant de polygones semblables, ou des parties homologues parallèles chacune à chacune d'autant de circonférences de cercles, ou de courbes semblables chacune à chacune, le produit fait de la ligne ou de la superficie mobile entière multipliée par le chemin que décrira son centre de gravité, sera égal à la somme des produits faits de chacune de ses parties multipliée par le chemin de son centre de gravité particulier, lorsque toutes les parties de cette ligne ou de cette superficie iront d'un même côté; & lorsque toutes les parties de la ligne ou de la superficie mobile n'iront pas d'un même côté, le même produit sera égal à la différence qu'il y aura entre la somme des produits faits de chacune des parties qui iront d'un même côté, multipliée par le chemin de son centre de gravité particulier, & la somme des produits faits de chacune des parties qui auront un mouvement opposé, multipliée par le chemin de son centre de gravité.

Les mouvemens des centres de gravité peuvent être d'un grand usage dans la Géométrie pratique : on va voir dans l'article suivant l'application qu'on en peut faire pour trouver les longueurs des portées moyennes dans les déblais & les remblais.

Des portées moyennes des terres dans les déblais & les remblais.

169. On peut déduire du dernier Théorème & de ses deux premiers Corollaires, une règle pour évaluer les portées moyennes des terres dans les déblais & les remblais, lorsque toutes les portées se font suivant des lignes droites parallèles entr'elles, ou suivant des portions semblables de polygones ou de courbes

semblables dont les parties correspondantes sont parallèles chacune à chacune. Quoique cette règle puisse avoir rarement lieu dans la pratique, & que la difficulté de son application soit le plus souvent une raison pour n'en point faire usage, lors même qu'elle peut avoir lieu ; on croit devoir la donner, ne fût-ce que pour faire voir comment on peut appliquer à la Géométrie pratique la doctrine des centres de gravité.

Supposons qu'on ait un terrein à aplanir, en abaissant une éminence *ABC* dont les terres doivent remplir un endroit *AMN* enfoncé au-dessous d'un niveau *CAN* auquel l'aplanissement de toute la surface est assujéti ; & que les déblais à faire dans les parties élevées au dessus de ce niveau, soient égaux aux remblais à faire dans les parties où la surface du terrein est au-dessous du même niveau. Voici la règle dont on pourra faire usage dans les cas énoncés, pour trouver la longueur de la portée moyenne des terres depuis le déblai jusques dans le remblai, en supposant que tous les transports se feront suivant une même ligne *CAN*, droite ou courbe, tracée ou imaginée sur la surface aplanie, ou suivant des lignes semblables & parallèles à cette ligne *CAN*. Fig. 108.

Après avoir trouvé le centre de gravité P *de l'éminence* A B C *qu'il faut abaisser, & le centre de gravité* Q *du creux qu'il faut remplir, on imaginera des lignes verticales* P R, Q S *tirées de ces centres de gravité jusqu'à l'une* C A N *des lignes suivant lesquelles on doit faire le transport des terres : & la partie* R S *de cette ligne, comprise entre les deux verticales* P R, Q S *sera la longueur de la portée moyenne ; en sorte que toutes les différentes longueurs des portées se réduiront à la longueur de la ligne* R S, *comme si toute la terre à transporter se trouvoit*

réunie au seul point R, *& qu'il fallût la porter au seul & même point* S.

Car le travail pour le transport de chaque partie de terre étant d'autant plus grand que la masse de cette partie est plus considérable, & que le chemin parcouru dans son transport est plus long ; il est clair que le transport de chaque partie de terre portée de l'éminence *A B C* dans le creux *A M N*, doit être regardé comme le produit de la masse de cette partie, multipliée par la distance qu'il y a de l'endroit de l'éminence où elle est prise jusqu'à l'endroit du creux où elle est déposée ; en sorte que le transport de la totalité de l'éminence *A B C* doit être considéré comme la somme des produits faits de chacune des parties de l'éminence, multipliée par le chemin du centre de gravité de cette partie.

Or tous les chemins parcourus dans les transports particuliers de toutes les parties de l'éminence, étant supposés parallèles à la ligne *C A N*, la somme des produits de chaque partie de l'éminence, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité de cette partie, est égale au produit fait de l'éminence entière, ou de la somme de ses parties, multipliée par le chemin du centre de gravité de l'éminence ; & le chemin du centre de gravité de l'éminence est égal à la ligne *R S*, puisqu'on suppose que le centre de gravité général *P* de toutes les terres de l'éminence répond au point *R* du chemin parcouru, & que le centre de gravité Q des mêmes terres transportées dans le creux *A M N* répond au point *S* du même chemin parcouru.

Donc la somme de tous les transports particuliers de toutes les parties de l'éminence *A B C* dans le creux *A M N*, doit être considérée comme si toute la terre

à transporter étoit rassemblée au point *R* qui répond verticalement au centre de gravité *P* de l'éminence, & qu'il fallût la porter au seul & même point *S* qui répond verticalement au centre de gravité Q du creux ou du remblai.

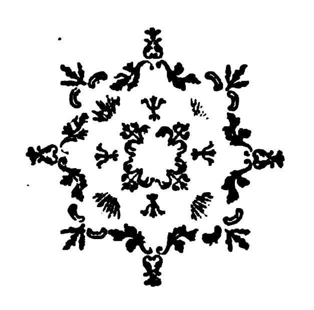
On remarquera qu'on ne regarde point la distance *P* Q du centre de gravité *P* du déblai au centre de gravité Q du remblai, comme le chemin parcouru par le centre de gravité des terres transportées; car le transport des terres ne se fait pas suivant cette ligne *P* Q, ni suivant des lignes qui lui soient parallèles: & l'on prend pour le chemin parcouru par le centre de gravité de l'éminence, une ligne *R S* située sur le terrein aplani, & terminée par des verticales tirées par les centres de gravité *P*, Q du déblai & du remblai; parce qu'on suppose que les terrassiers marchent suivant cette ligne ou suivant des lignes qui lui sont parallèles.

Il suit de la première partie du Corollaire premier ou du Corollaire II, que dans le cas où tous les chemins parcourus pour le transport de l'éminence sont des portions de polygones semblables, ou de courbes semblables dont toutes les parties correspondantes peuvent être regardées comme parallèles chacune à chacune; si l'on décrit entre les deux points *R*, *S* une portion de polygone ou de courbe semblable à quelqu'un des chemins parcourus, cette portion de polygone ou de courbe sera le chemin parcouru par le centre de gravité des terres transportées, & sera par conséquent la longueur de la portée moyenne des terres.

Si les terres d'une même éminence dont on suppose que *P* est le centre de gravité, étoient portées dans Fig. 109.

différens endroits creux d'un terrein pour l'aplanir, & que *Q*, *R*, *S*, *T* fussent les centres de gravité particuliers de ces creux; on porteroit sur une même ligne *PT* tirée du point qui répond verticalement au centre de gravité *P* de l'éminence, au point qui répond au centre de gravité *T* de l'un des creux qu'il faut remplir, toutes les distances *PQ*, *PR*, *PS* qu'il y auroit du même point de l'éminence aux points qui répondroient verticalement aux centres de gravité *Q*, *R*, *S*, c'est-à-dire qu'on feroit $Pq = PQ$, $Pr = PR$, $Ps = PS$; & ayant trouvé le centre de gravité commun *V* des points *q*, *r*, *s*, *T*, où l'on supposeroit que les creux *Q*, *R*, *S*, *T* sont situés, on prendroit la ligne *PV* pour la longueur de la portée moyenne des terres.

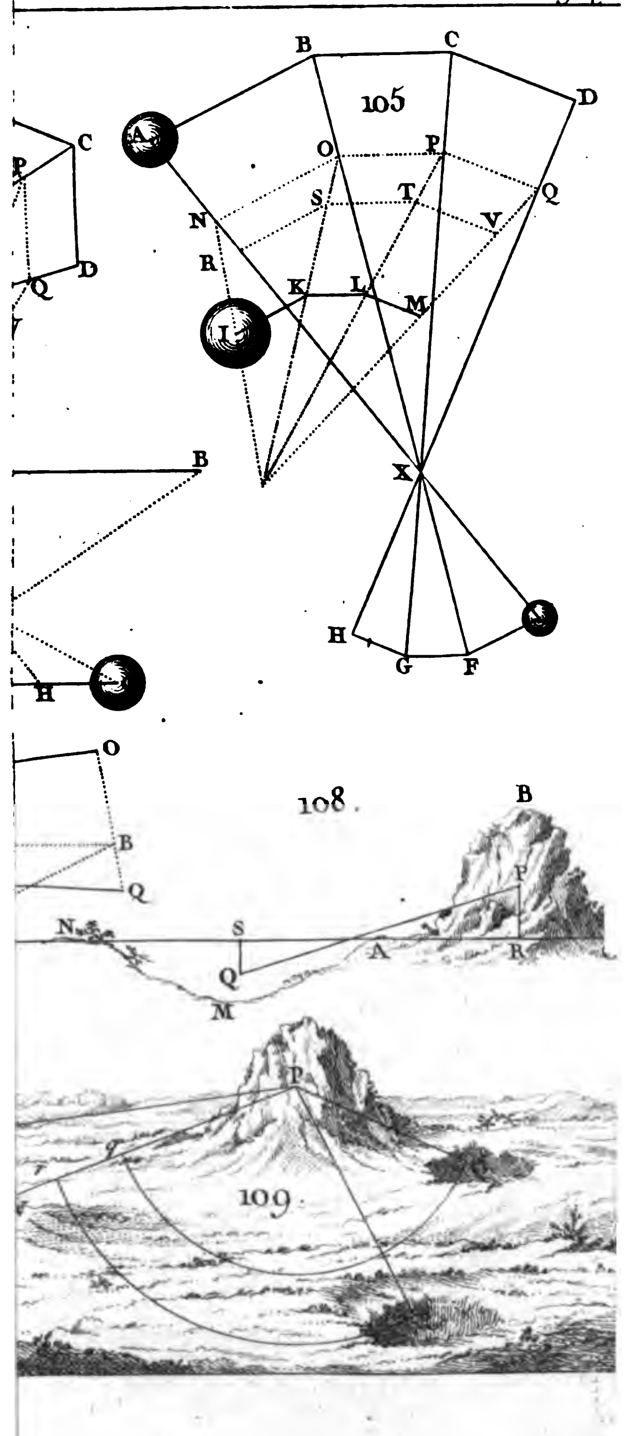
On tire encore de la théorie des centres de gravité, principalement du dernier Théorème & de ses deux premiers Corollaires, une méthode très-commode pour mesurer les surfaces & les solides qui peuvent être engendrés par des mouvemens de lignes & d surfaces : cette méthode fera le sujet du Chapitre suivant.



99.

101.

103


105
B
C
D
A
O
P
Q
S
T
V
N
R
K
L
M
I
X
H
G
F
108
B
P
N
S
A
R
Q
M
109
P
q
r

CHAPITRE X.

Des ſuperficies & des ſolides qui doivent leur génération à des mouvemens de lignes & de plans; & de l'uſage qu'on peut faire du mouvement du centre de gravité d'une figure, pour trouver l'étendue de la ſuperficie ou du ſolide qu'elle engendre.

170. LORSQU'UNE droite *AB* n'a point d'autre mouvement que ſuivant la direction de ſa longueur, chacun de ſes points ſuit le chemin du point qui le précède; en ſorte que du mouvement de cette ligne tranſportée de *AB* en *CD* ſuivant ſa propre direction, il ne réſulte qu'une nouvelle portion de ligne *BD* qui ne compoſe avec la droite mobile *AB* qu'une ſeule droite *AD*. Ainſi le mouvement d'une ligne droite ſuivant la direction de ſa longueur, ne ſauroit produire de ſuperficie. Fig. 110.

Il n'eſt pas moins évident qu'un plan *ABC* qui ſe meut ſuivant ce plan lui-même, ne peut pas produire un ſolide, mais ſeulement un plan plus grand *ABEFD* dont le plan mobile *ABC* fait partie. Fig. 111.

Les lignes droites & les plans ne peuvent donc engendrer des ſuperficies & des ſolides par leurs mouvemens, qu'autant qu'ils s'éloignent de la direction de leur première ſituation. Mais comme une ligne droite ou un plan, avec la même quantité de mouvement, s'écarte plus ou moins de ſa première direction, & décrit une étendue ſuperficielle ou ſolide plus ou moins grande ſuivant que ſon mouvement eſt

moins ou plus oblique à ſa première direction; il convient de diſtinguer dans le mouvement d'une ligne droite ou d'un plan, la partie du mouvement qui engendre une ſuperficie ou un ſolide, d'avec celle qui ne contribue point à ſa génération.

Fig. 112 & 113. Lorſqu'une droite *AB*, en demeurant toûjours parallèle à ſa première poſition, ſe meut dans un plan le long d'une directrice oblique *AC* droite ou courbe; on peut ſuppoſer qu'elle a en même temps deux mouvemens perpendiculaires l'un à l'autre, l'un ſuivant ſa propre direction & par lequel elle n'engendre point de ſuperficie, l'autre ſuivant une droite *AE* perpendiculaire à ſa longueur & par lequel (ſi elle n'avoit point d'autre mouvement) elle produiroit un parallélogramme rectangle *ABFE* égal au parallélogramme rectiligne ou mixtiligne *ABDC* réellement engendré.

Ainſi quoique le parallélogramme rectiligne ou mixtiligne *ABDC* ſoit véritablement engendré par le mouvement ſimple de la droite *AB* le long de la directrice *AC* droite ou courbe, & que la figure de ce quadrilatère dépende de la figure & de la poſition de ſa directrice *AC* relativement à ſa génératrice *AB*; ſa grandeur ne peut pas être attribuée au mouvement ſimple de ſa génératrice le long de ſa directrice, mais ſeulement au ſecond des deux mouvemens perpendiculaires l'un à l'autre, dans leſquels on a décompoſé ce mouvement ſimple, c'eſt-à-dire à celui par lequel la génératrice *AB* ſe meut le long d'une droite *AE* qui lui eſt perpendiculaire.

L'étendue d'une ſuperficie engendrée par le mouvement d'une ligne droite ne peut donc être attribuée à tout le mouvement de cette ligne, que dans le cas

où cette ligne est perpendiculaire à la direction de son mouvement.

Il est aisé de prouver de la même manière que la grandeur du solide d'un prisme engendré par un plan mû suivant une directrice oblique à ce plan, ne doit pas être attribuée à tout le mouvement de ce plan; mais qu'il faut décomposer ce mouvement en deux autres dirigés, l'un suivant ce plan lui-même, l'autre suivant une direction perpendiculaire au même plan: & comme le mouvement d'un plan suivant lui-même ne produit point de solide, on ne doit regarder comme véritable cause productrice de l'étendue du prisme engendré, que le second mouvement par lequel le plan générateur se meut le long d'une ligne perpendiculaire à lui-même.

Il suit de là que si tous les points d'une ligne droite ou d'un plan décrivent des polygones ou des courbes dont toutes les parties correspondantes soient égales & parallèles chacune à chacune, on ne doit regarder le mouvement de cette ligne ou de ce plan comme la vraie cause productrice de l'étendue engendrée, que dans le cas où cette ligne & ce plan seront continuellement perpendiculaires aux chemins que parcourront tous leurs points.

Par la même raison, lorsque le contour d'un polygone ou d'une courbe engendrera par son mouvement une superficie, on n'attribuera l'étendue de cette superficie au mouvement du contour du polygone ou de la courbe mobile, que dans le cas où toutes les parties de ce contour ou de cette courbe seront continuellement perpendiculaires aux chemins qui décriront tous leurs points.

On va voir dans le reste de ce Chapitre l'usage

qu'on peut faire du mouvement du centre de gravité d'une figure, pour trouver l'étendue de la superficie ou du solide qu'elle engendre par son mouvement : & comme on vient de prouver que les étendues superficielles ou solides engendrées ne doivent être attribuées à des mouvemens de lignes ou de plans, qu'autant que toutes les parties de ces lignes ou de ces plans sont continuellement perpendiculaires aux chemins que parcourent tous leurs points ; on ne parlera que des étendues qui seront produites par des lignes ou par des plans mobiles continuellement perpendiculaires aux chemins parcourus par tous leurs points, & qu'on pourra par conséquent considérer comme la somme des filets produits par tous ces points, ou comme la somme des produits faits de chaque point ou de chaque partie infiniment petite, & du chemin parcouru par le centre de ce point ou de cette partie infiniment petite.

THÉOREME.

Fig. 114 & 115. 171. *L'étendue superficielle ou solide engendrée par une ligne ou par un plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins semblables & parallèles parcourus vers un même côté par tous ses points, est égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin* PQ *que décrit son centre de gravité* P.

DÉMONSTRATION.

Puisqu'on suppose la ligne ou le plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins parcourus par tous ses points, chacune des parties infiniment petites de cette ligne ou de ce plan engendrera une petite superficie ou un petit solide qui sera le produit

de cette partie multipliée par le chemin de quelqu'un de ses points : & comme les chemins parcourus par tous les points d'une partie infiniment petite different infiniment peu les uns des autres, & doivent par conséquent être réputés égaux au chemin décrit par le centre de gravité de cette partie, la petite superficie ou le petit solide que chaque partie infiniment petite de la ligne ou du plan mobile engendrera, sera le produit de cette partie multipliée par le chemin de son centre de gravité.

L'étendue superficielle ou solide entière engendrée par une ligne ou par un plan mobile, sera donc la somme des produits faits de chaque partie de cette ligne ou de ce plan, multipliée par le chemin du centre de gravité particulier de cette partie.

Mais (*n*°. 168) puisque tous les points de la ligne ou du plan mobile vont d'un même côté & décrivent des lignes semblables & parallèles, la somme des produits faits de chaque partie de cette ligne ou de ce plan mobile, multipliée par le chemin de son centre de gravité particulier, est égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin de son centre de gravité.

Donc l'étendue superficielle ou solide engendrée par une ligne ou par un plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins semblables & parallèles parcourus vers un même côté par tous ses points, est égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin de son centre de gravité. *C. Q. F. D.*

Quoiqu'on puisse déduire ce Théorème des Ouvrages de Pappus, tout le monde convient qu'on le doit au Père

Guldin, Jésuite, qui l'a développé dans son Livre De centro gravitatis, *publié en* 1635, *où il donne cette règle :* Quantitas *rotanda* in viam rotationis *centri gravitatis* ducta producit quantitatem *rotundam* uno gradu altiorem poteſtate ſive quantitate rotatâ ; *& où il avertit que cette règle a lieu, non-ſeulement dans le cas où la ligne décrite par le centre de gravité de la figure génératrice eſt circulaire, mais encore dans celui où cette ligne eſt droite, & que la grandeur génératrice ſe meut en demeurant toûjours parallèle à ſa première poſition, & de manière que tous ſes points décrivent des lignes perpendiculaires à cette première poſition.*

La régle du P. Guldin ayant été reçûe avec applaudiſſement de tous les Géomètres, pluſieurs en ont donné la démonſtration. M. Leibnitz dans les Actes de Leipſick (année 1695, pag. 493 & ſuiv.) *l'a étendue à la dimenſion des ſurfaces engendrées par le développement des lignes courbes, & M. Varignon eſt le premier qui ait démontré l'uſage que M. Leibnitz en a fait.*

Cette règle du P. Guldin contenue dans le Théorème qu'on vient de démontrer, étant extrêmement commode en Géométrie pour le toiſé d'une infinité de ſurfaces & de ſolides, on en va faire l'application au toiſé de pluſieurs figures : on commencera par celles qui ſont les plus faciles à toiſer, & dont on ſait déjà trouver les ſurfaces & les ſolidités.

COROLLAIRE I.

172. Quoiqu'on ait prouvé de la manière la plus ſimple dans la Géométrie, que l'aire d'un parallélogramme rectangle eſt égale au produit de ſes deux côtés contigus ; que la ſurface d'un priſme droit, ſans
Fig. 114. y comprendre ſa baſe génératrice *ABCDE* & ſa

base opposée *FGHIK*, est égale au produit de la multiplication du contour de cette base par la directrice *AF*; & que la solidité d'un prisme droit est égale au produit de l'aire de sa base *ABCDE* multipliée par sa directrice *AF*; on ne croit pas devoir négliger de faire voir que les mêmes vérités sont des conséquences simples & naturelles du Théorème qu'on vient de démontrer.

Chacune de ces figures est (*n°.* 171) égale au produit de la multiplication de sa base génératrice par le chemin que décrit son centre de gravité. Or le chemin décrit par le centre de gravité de la base génératrice de chacune de ces figures, est égal à la directrice du mouvement de cette base, puisqu'elle se meut parallèlement à sa première position le long de la directrice. Donc chacune de ces figures est le produit de sa base génératrice multipliée par sa directrice.

COROLLAIRE II.

173. Quoique la propriété qu'un triangle a d'être la moitié d'un parallélogramme rectangle de même base & de même hauteur, paroisse le moyen le plus simple pour prouver qu'un triangle est égal au produit de sa base & de la moitié de sa hauteur, on peut déduire cette vérité avec la même facilité du Théorème qu'on vient de démontrer.

Car on peut imaginer qu'un triangle rectangle *ABC* est produit par le mouvement de toutes les parties infiniment petites *AD*, *DE*, *EF*, *&c.* de sa base *AB*, mûes suivant des lignes parallèles à sa hauteur *BC*; & que toutes ces parties, après avoir produit le triangle *ABC*, sont également distribuées sur Fig. 116.

l'hypoténuſe *AC* en *GH*, *IK*, *LM*, &c. en ſorte que leur centre de gravité commun ſe trouve au milieu Q de cette hypoténuſe. Cela poſé, le milieu ou centre de gravité *P* de la droite génératrice *AB*, ſe meut en ligne droite (*n°.* 160) depuis le milieu *P* de cette ligne juſqu'au milieu Q de l'hypoténuſe *AC*, & décrit par conſéquent une ligne égale à la moitié de la hauteur *BC*. Or (*n°.* 171) la ſurface totale engendrée par toutes les parties de la droite *AB*, eſt égale au produit de cette génératrice & de la ligne *PQ* décrite par ſon centre de gravité. Ainſi l'aire du triangle rectangle *ABC* eſt égale au produit de ſa baſe *AB* & de la moitié de ſa hauteur *BC*.

Fig. 117. Un triangle *ABD* non rectangle étant égal à un triangle rectangle *ABC* de même baſe & de même hauteur, il eſt clair que l'aire du triangle non rectangle *ABD* ſera auſſi égale au produit de ſa baſe *AB* & de la moitié de ſa hauteur *BC*.

Fig. 118. On déduira de même & avec la même facilité de la règle qu'on vient de démontrer, que le ſolide d'une pyramide *SABC* eſt égal au produit de ſa baſe *ABC* & du tiers de ſa hauteur *SD*.

Car dans le cas où la perpendiculaire *SD* tirée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe ſera au dedans de la pyramide; ſi l'on diviſe ſa baſe *ABC* en triangles *ADB*, *BDC*, *ADC*, par des lignes tirées du pied *D* de la perpendiculaire à tous les angles de cette baſe, on concevra la pyramide entière *SABC* partagée en autant de pyramides triangulaires *SADB*, *SBDC*, *SADC*, qu'il y aura de triangles dans la baſe totale *ABC*.

Qu'on imagine maintenant l'une quelconque *SADB* de ces nouvelles pyramides compoſée d'u-

ne infinité de filets engendrés par tous les points de sa base ADB, mûs parallèlement à sa hauteur SD jusqu'à sa face ASB : le centre de gravité Q de cette base ADB se sera mû aussi (nº 160) jusqu'à la face ASB suivant une droite QM parallèle à SD, & la solidité de la pyramide triangulaire $SADB$ sera (nº. 171) égale au produit $ADB \times QM$.

La droite QM parallèle à SD, étant comprise entre la base ADB & la face ASB de la pyramide $SADB$, sera contenue dans le triangle SDR qui coupera la pyramide par le point Q, suivant la droite SD; ainsi les triangles RQM, RDS seront semblables, & donneront par conséquent $RQ : RD :: QM : SD$.

Or Q étant le centre de gravité du triangle ADB, on aura $RQ = \frac{1}{3} RD$. Donc on aura aussi $QM = \frac{1}{3} SD$; & par conséquent le solide de la pyramide $SADB$, ou $ADB \times QM$, sera égal à $ADB \times \frac{1}{3} SD$.

On démontrera de la même manière que les autres pyramides triangulaires $SBDC$, $SADC$ seront égales aux produits $BDC \times \frac{1}{3} SD$, $ADC \times \frac{1}{3} SD$, &c. ainsi la pyramide entière $SABC$ sera égale à $(ADB + BDC + ADC) \times \frac{1}{3} SD = ABC \times \frac{1}{3} SD$; c'est-à-dire que la pyramide $SABC$ est égale au produit fait de sa base multipliée par le tiers de sa hauteur.

Si la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur le plan de sa base n'étoit point comprise dans cette pyramide, la pyramide seroit encore égale au produit de sa base & du tiers de sa hauteur; parce qu'elle seroit égale à une autre pyramide de même base & de même hauteur qui contiendroit la perpendiculaire menée de son sommet à sa base.

Corollaire III.

Fig. 119 & 120. 174. Lorſqu'une droite *A C* tourne autour de ſon extrémité *C*, le milieu ou centre de gravité *P* de cette ligne décrit une ligne égale à la moitié de celle qui eſt parcourue par ſon autre extrémité *A*; & ſi l'on ne conſidère que le mouvement d'une partie
Fig. 121 & 122. *A B* de cette ligne, le milieu ou centre de gravité *P* de cette partie *A B* décrira une ligne égale à la moitié de la ſomme des deux lignes décrites par ſes deux extrémités *A*, *B*.

Fig. 119, 120, 121, & 122. Or (*n*°. 171) l'aire ou la ſuperficie engendrée par le mouvement de la droite *A C*, ou par celui de ſa partie *A B*, eſt égale au produit de cette ligne ou de cette partie multipliée par le chemin de ſon centre de gravité *P*.

Donc l'aire engendrée par la ligne entière *A C* mûe autour de ſon extrémité *C*, eſt égale au produit de cette ligne multipliée par la moitié du chemin que parcourt ſon extrémité *A*; & l'aire de la ſuperficie engendrée par une partie *A B* de cette ligne, eſt égale au produit de cette partie *A B* multipliée par la moitié de la ſomme des deux lignes que parcourent les deux extrémités *A*, *B* de cette partie.

Fig. 119 & 121. Si la droite *A C* ſe meut dans un plan, elle décrira un cercle ou un ſecteur de cercle *A C D*, & ſa partie *A B* produira une couronne ou une portion de couronne compriſe entre deux circonférences ou entre deux portions de circonférences parallèles. Donc l'aire d'un cercle entier ou d'un ſecteur de cercle, eſt égale au produit de ſon rayon multiplié par la moitié de ſa circonférence, ou par la moitié de ſon arc *A D*; & l'aire d'une couronne ou d'une portion de couronne compriſe

comprise entre deux parties de rayons, & deux circonférences ou deux portions de circonférences parallèles, est égale au produit de la portion *A B* du rayon multipliée par la moitié de la somme des deux circonférences, ou des deux portions de circonférences, décrites par les extrémités de la partie génératrice *A B*.

Si la droite *A C* est l'hypoténuse d'un triangle rectangle *A D C* mobile autour de son côté *C D*, elle produira la surface convexe d'un cone droit, & sa partie *A B* engendrera la surface convexe d'un tronc conique droit à bases opposées parallèles. Ainsi la surface convexe d'un cone droit est égale au produit de la multiplication de la droite *C A* tirée de son sommet à la circonférence de sa base, par la moitié de la circonférence de la même base; & la surface convexe d'un tronc conique droit à bases opposées parallèles, est égale à son côté générateur *A B* multiplié par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées de ce tronc. Fig. 120 & 122.

COROLLAIRE IV.

175. Si du centre de gravité *P* d'un triangle rectangle *A D C* l'on mène une perpendiculaire *P Q* sur son côté *C D*, cette perpendiculaire sera égale au tiers du côté *A D*; ainsi lorsque pour engendrer le solide d'un cone droit, l'on fera tourner ce triangle autour de son côté *G D*, son centre de gravité *P* décrira une circonférence égale au tiers de celle de la base du cone. Donc (*n°.* 171.) le solide du cone droit qui sera engendré par la révolution du triangle *A D C*, sera égal au produit de la multiplication du Fig. 123.

triangle générateur ADC, par le tiers de la circonférence de ſa baſe.

Mais le triangle $ADC = \frac{AD \times DC}{2}$. Donc ſi l'on repréſente la circonférence du cercle qui a AD pour rayon par *circ* AD, & le tiers de cette circonférence par $\frac{circ\ AD}{3}$, le ſolide du cone droit dont il eſt queſtion ſera exprimé par $\frac{AD \times DC}{2} \times \frac{circ\ AD}{3}$, ou par $circ\ AD \times \frac{AD}{2} \times \frac{DC}{3}$.

Or $circ\ AD \times \frac{AD}{2}$ eſt la ſurface d'un cercle qui a AD pour rayon, c'eſt-à-dire la ſurface de la baſe du cone engendré par la révolution du triangle rectangle ADC.

Donc le ſolide d'un cone droit engendré par le triangle ADC, eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par le tiers de ſa hauteur DC.

COROLLAIRE V.

Fig. 124. 176. Le tronc d'un cone droit à baſes oppoſées parallèles eſt engendré par une portion $ADEB$ de triangle rectangle, mûe autour du côté CD de ce triangle. Ainſi le ſolide de ce tronc eſt égal au produit du trapèze générateur $ADEB$ multiplié par la circonférence que décrit le centre de gravité P de ce trapèze.

Mais au lieu de multiplier le trapèze générateur entier $ADEB$ par la circonférence que décrit ſon centre de gravité P, on peut partager ce trapèze par une diagonale BD en deux triangles EBD, ABD,

& considérer que le premier triangle EBD qui est rectangle, produit par sa révolution sur ED un cone droit qui a même hauteur que le tronc, & qui a pour base la base supérieure du tronc : & comme le solide de ce cone droit est déterminé (*n°.* 175), on n'aura plus qu'à trouver le solide engendré par la révolution du triangle ABD autour de l'axe DE, en multipliant l'aire de ce triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité ; ce qui donnera (en supposant que R est le centre de gravité du triangle ABD, que RT est perpendiculaire à l'axe DE, & que *circ* RT représente la circonférence du cercle qui a RT pour rayon) $\frac{1}{2} AD \times DE \times circ\, RT$ pour le solide qui reste à déterminer.

Le centre de gravité R du triangle ABD étant au milieu d'une droite QS menée parallèlement à sa base par un point pris au tiers de la hauteur de ce triangle, il est aisé de voir que $RS = \frac{1}{3} AD$, & que $ST = \frac{1}{3} BE$; d'où il suit que $RT = \frac{AD}{3} + \frac{BE}{3}$, & par conséquent $circ\, RT = \frac{circ\, AD}{3} + \frac{circ\, BE}{3}$. Ainsi le solide engendré par le triangle ABD sera exprimé par $\frac{1}{2} AD \times DE \times (\frac{circ\, AD}{3} + \frac{circ\, BE}{3})$, ou par $circ\, AD \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE + circ\, BE \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$.

Mais 1°. $circ\, AD \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$ est le solide d'un cone qui a AD pour rayon & DE pour hauteur, c'est-à-dire d'un cone qui a même hauteur que le tronc, & dont la base est égale à la base inférieure du même tronc. 2°. $circ\, BE \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$ est aussi le solide d'un cone qui a même hauteur DE que le tronc, & dont la base est égale à $circ\, BE \times \frac{1}{2} AD$.

Or cette base est moyenne proportionnelle entre les deux bases circulaires opposées du tronc, qui sont exprimées par *circ BE* × ½ *BE*, & *circ AD* × ½ *AD*; car *circ BE* × ½ *BE* : *circ BE* × ½ *AD* :: *BE* : *AD*, & *BE* : *AD* :: *circ BE*:*circ AD* ou :: *circ BE* × ½ *AD* : *circ AD* × ½ *AD*. Ainsi *circ BE*×½*BE*:*circBE*×½*AD*:: *circBE*×½*AD* : *circAD*×½*AD*; c'est-à-dire que *circ BE* × ½ *AD* est une moyenne proportionnelle entre les produits *circ BE* × ½ *BE* & *circ AD*×½*AD* égaux aux deux bases opposées du tronc.

Donc le solide du tronc conique droit à bases opposées parallèles, est égal à trois pyramides de même hauteur que le tronc, & qui ont pour bases, la base supérieure du tronc, la base inférieure du tronc, & une base moyenne proportionnelle entre les bases opposées du même tronc.

On doit remarquer que pour avoir une moyenne proportionnelle entre les deux bases opposées du tronc, il n'est pas nécessaire de multiplier ces deux bases opposées l'une par l'autre, & de tirer la racine quarrée de leur produit; & qu'on la trouvera plus facilement en multipliant la circonférence de la base supérieure par la moitié du rayon de la base inférieure, puisqu'elle est égale à circ BE × ½ AD. *On trouveroit aussi cette base en multipliant la circonférence de la base inférieure du tronc, par la moitié du rayon de la base supérieure; puisque* circ BE : circ AD :: BE : AD *ou* :: ½ BE : ½ AD, *& par conséquent* circ BE × ½ AD = circ AD × ½ BE.

COROLLAIRE VI.

Fig. 125. 177. Le centre *C* d'un cercle ou d'une ellipse *BDEF* étant le centre de gravité de sa circonférence & de sa superficie, il suit évidemment du Théorème (*n°.* 171) que si l'on fait tourner un cercle ou une

ellipſe autour d'un point fixe *A*, de manière que ſon plan ſoit continuellement perpendiculaire aux chemins parcourus par tous ſes points, la ſuperficie ou le ſolide de l'anneau engendré par ce mouvement, ſera égal au produit de la circonférence ou de la ſurface du cercle ou de l'ellipſe mobile, & de la circonférence décrite par le centre de ce cercle ou de cette ellipſe.

Il ſuit de là que la ſuperficie d'un berceau tournant, formé par le mouvement d'un demi-cercle ou d'une demi-ellipſe *B D E* autour d'un axe vertical *A Z*, eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence de ce demi-cercle ou de cette demi-ellipſe, par la circonférence ou par la portion de circonférence qui a été décrite par le centre *C* du cercle ou de l'ellipſe. Car le centre de gravité *P* du demi-cercle ou de la demi-ellipſe étant dans une ligne perpendiculaire au diamètre *B E* ou parallèle à l'axe *A Z* de révolution, a décrit une circonférence ou une portion *P Q* de circonférence égale à la circonférence ou à la portion *C K* de circonférence décrite par le centre *C* du cercle ou de l'ellipſe. Fig. 126.

COROLLAIRE VII.

178. Lorſqu'un demi-cercle *D B E* eſt conſtruit ſur un diamètre *D E* parallèle à l'axe *A Z* autour duquel il tourne, il engendre un tore dont la ſuperficie convexe eſt égale au produit de la demi-circonférence mobile *D B E* multipliée par la circonférence ou par la portion de circonférence que décrit le centre de gravité *P* de cette demi-circonférence mobile; c'eſt à-dire que la ſuperficie du tore produit par la révolution entière de la demi-circonférence *D B E*, eſt Fig. 127.

égale à *DBE* × *circ PA* ou à *DBE* × (*circ PC* + *circ CA*), ou enfin à *D B E* × *circ P C* + *D B E* × *circ C A.*

Mais la partie *D B E* × *circ P C* eſt égale à la ſurface de la ſphère qui ſeroit produite par la révolution du demi-cercle *D B E* ſur ſon diamètre *D E.*

Donc la ſuperficie du tore produit par la révolution du demi cercle *D B E* autour de l'axe *A Z*, vaut la ſuperficie d'une ſphère qui a même diamètre que le demi-cercle générateur du tore, plus le produit de la demi-circonférence *D B E* multipliée par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance *CA* du diamètre *D E* à l'axe *A Z* de révolution.

Comme le centre de gravité *P* de la demi-circonférence & celui Q du quart de circonférence, ſont à la même diſtance du diamètre *D E*; on peut prouver directement & de la même manière que la ſurface d'un quart-de-rond décrit par la révolution d'un quart de cercle *D C B* autour d'un axe *A Z* parallèle au rayon terminateur *C D* du quart de cercle, vaut la ſurface d'une demi-ſphère, plus le produit du quart de circonférence *B D* multiplié par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance qu'il y a entre l'axe *A Z* de révolution & le rayon *CD* parallèle à cet axe.

Si l'on vouloit avoir le ſolide du tore engendré par la révolution de la ſurface du demi-cercle *D B E* autour de l'axe *A Z*, & que *P* fût le centre de gravité du demi-cercle générateur; on multiplieroit la ſurface de ce demi-cercle *D B E* par la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la droite *P A* tirée perpendiculairement ſur l'axe *A Z*, ou par deux circonférences qui auroient pour rayons les deux parties *P C*, *C A* de la droite *P A*. Mais la ſurface du demi-

cercle DBE multipliée par la circonférence du cercle qui auroit PC pour rayon, eſt égale au ſolide de la ſphère qui ſeroit engendrée par la révolution du demi-cercle DBE ſur ſon diamètre DE, & qui auroit par conſéquent même diamètre que ce demi-cercle. Donc le ſolide du tore engendré par la ſurface du demi-cercle DBE dans ſa révolution autour de l'axe AZ, vaut le ſolide d'une ſphère de même diamètre que ce demi-cercle, plus le produit de la ſurface du même demi-cercle multipliée par la circonférence qui a CA pour rayon.

Il ſuit de là que le ſolide d'un quart-de-rond produit par la révolution d'un quart de cercle DCB autour d'un axe AZ parallèle au rayon terminateur CD du quart de cercle, vaut le ſolide d'une demi-ſphère qui a même rayon que le quart de cercle, plus le produit de la ſurface de ce quart de cercle multipliée par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance CA de l'axe AZ au rayon CD.

COROLLAIRE VIII.

179. Si la convexité d'un demi-cercle mobile DBE étoit tournée vers l'axe AZ de ſon mouvement, la demi-circonférence DBE engendreroit la ſurface d'une gorge ſemblable à celle d'une poulie, & la ſurface de cette gorge ſeroit égale au produit de la demi-circonférence mobile DBE multipliée par la circonférence qui auroit pour rayon la diſtance PA du centre de gravité de la demi-circonférence mobile à l'axe AZ de révolution; c'eſt-à-dire que la ſurface de cette gorge ſeroit égale à $DBE \times circ\,PA$. Fig. 128.

Mais $PA = CA - CP$; ainſi $circ\,PA = circ\,CA - circ\,CP$; & par conſéquent $DBE \times circ\,PA = DBE \times circ\,CA - DBE \times circ\,CP$.

Donc la ſurface de la gorge décrite par *DBE* eſt égale à *DBE* × *circ CA* — *DBE* × *circ CP*; & comme le produit *DBE* × *circ CP* eſt égal à la ſurface d'une ſphère qui ſeroit engendrée par la révolution du demi-cercle *DBE* autour de ſon diamètre *DE*, la ſurface de la gorge eſt égale à la différence qu'il y a entre la ſurface d'une ſphère qui a même diamètre que la demi-circonférence génératrice *DBE* de la gorge, & le produit de cette demi-circonférence génératrice multipliée par la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la diſtance *AC* de l'axe *AZ* au diamètre *DE*.

On démontrera de la même manière que le ſolide propre à remplir la gorge engendrée par la révolution du demi-cercle *DBE* autour de l'axe *AZ*, eſt égal à la différence qu'il y a entre le ſolide d'une ſphère de même diamètre que le demi-cercle générateur, & le produit de la ſurface de ce demi-cercle multipliée par la circonférence qui a pour rayon la diſtance *AC* de l'axe *AZ* au diamètre *DE*.

COROLLAIRE IX.

Fig. 129 & 130. 180. Lorſque deux arcs de cercles *AHP*, *PGD* égaux & ſemblables compoſent une doucine ou un talon *AHPGD* en ſe touchant au point *P* où ils ſe raccordent, le point *P* de leur raccordement eſt leur centre de gravité commun. Ainſi lorſque la doucine ou le talon *AHPGD* tournera autour d'un axe *CF* ſitué dans ſon plan, la ſurface engendrée par ſon mouvement ſera égale au produit de la multiplication de cette doucine ou de ce talon, par la circonférence ou par la portion de circonférence que décrira le point de raccordement *P* des deux arcs *AHP*, *PGD*.

Si les deux arcs *A H P*, *P G D* qui composent la doucine ou le talon ne sont pas semblables ou ne sont pas égaux, il faudra chercher le centre de gravité de chacun des deux arcs, & multiplier chaque arc par le chemin que parcourra son centre de gravité, pour avoir la valeur de la superficie engendrée par le mouvement de la doucine ou du talon *A H P G D*.

Il est aisé de voir par le petit nombre d'exemples qu'on vient de donner, l'usage qu'on peut faire des centres de gravité des figures, pour trouver les superficies & les solides qu'elles engendrent par leur mouvement; ainsi nous pourrions nous abstenir d'insister davantage sur cet usage, si nous n'avions pas promis à la fin de la Géométrie de parler du toisé des dômes, des voûtes en arc de cloître & des voûtes d'arête.

CHAPITRE XI.

Du toisé des Dômes, des Voûtes en arc de cloître, & des Voûtes d'Arête.

181. UN *Dôme* est un demi-sphéroïde *S A B C D* dont la surface est engendrée par la révolution d'une courbe *S M* autour de l'axe *S R* de ce sphéroïde. Fig. 131.

Une *Voûte en Arc de cloître* est une espèce de dôme à pans, élevé sur un plan rectiligne régulier ou non régulier. Sa surface est composée d'autans de pans *A S B*, *B S C*, *C S D*, &c. que le plan de sa base a de côtés. Fig. 136, 137, 138, 139.

Lorsque deux berceaux *A E B D F C*, *A G D B H C* de même hauteur construits sur un même plan *A B C D* se croisent, & que les parties de chaque berceau contenues dans l'autre berceau sont supprimées, ce qui Fig. 140, 141 & 142.

reste des deux berceaux s'appelle *Voûte d'Arête.*

Si l'on fait attention à la composition de cette voûte, on remarquera aisément que les parties supprimées dans les deux berceaux, pour avoir une voûte d'arête, formeroient une voûte en arc de cloître élevée sur le même plan *A B C D*; en sorte que la voûte d'arête & la voûte en arc de cloître, élevées à la même hauteur sur un même plan *A B C D*, composent ensemble deux berceaux.

Chaque portion *S A E B* de berceau ou de voûte d'arête, comprise entre deux arêtes contigues *S A*, *S B*, peut s'appeler *Lunette* de voûte d'arête.

Des Dômes.

182. On distingue trois sortes de dômes; les *Dômes en plein cintre*, les *Dômes surbaissés*, & les *Dômes surmontés.*

Comme les dômes en plein cintre sont des demi-sphères, & qu'on a suffisamment parlé de la sphère & de ses parties dans les élémens de Géométrie, il est inutile de s'y arrêter dans ce Traité.

Fig. 133. Un dôme surbaissé peut être formé par un quart d'ellipse *A B* mû autour de la moitié *B C* de son petit axe, & le dôme surmonté peut être engendré par la Fig. 135. révolution d'un quart d'ellipse *A B* mû autour de la moitié *A C* de son grand axe. Mais comme les dômes engendrés par des ellipses assujétiroient à des soins qu'il seroit difficile de prendre dans un grand ouvrage, on forme ordinairement les dômes surbaissés & les dômes surmontés avec des moitiés d'anses de panier qu'on fait tourner sur leur petit diamètre ou sur leur grand diamètre, suivant qu'on veut avoir des dômes surbaissés ou des dômes surmontés.

PROBLEME.

183. *Trouver la superficie d'un dôme surbaissé engendrée par la révolution de la moitié* A G B *d'une anse de panier autour de sa montée* C B. Fig. 132.

SOLUTION.

On suppose, comme on a fait (*Géom. n°. 616*), que la moitié *A G B* de l'anse de panier est composée d'un arc *GB* de 30 degrés qui a son centre *K* dans le prolongement de la montée *CB*, & d'un arc *AG* de 60 degrés qui a son centre *F* dans le demi-diamètre *AC*.

La montée *CB* autour de laquelle l'arc *GB* doit tourner faisant partie du rayon de cet arc, il est évident que l'arc *GB* engendrera une calotte sphérique dont la superficie sera égale à celle du cercle qui aura pour rayon la corde *B G* de cet arc.

Si du centre de gravité *P* de l'arc *AG* de 60 degrés l'on abaisse une perpendiculaire *PQ* sur le demi-diamètre *AC* de l'anse, *CQ* sera égal au rayon de la circonférence décrite par ce centre de gravité *P*. Ainsi la zone décrite par l'arc *AG* autour de l'axe *CB*, sera égale au produit $AG \times circ\, QC = AG \times circ\, QF + AG \times circ\, FC$.

Mais *F* étant le centre de l'arc *A G*, la partie $A G \times circ\, Q F$ est une zone sphérique qui seroit engendrée par la révolution de l'arc *A G* autour d'un axe *FL* perpendiculaire à son rayon *A F*; & cette zone sphérique est égale à sa hauteur *G E* multipliée par la circonférence du cercle qui auroit *A F* pour rayon.

Donc la superficie d'un dôme surbaissé engendrée par la révolution de la moitié *A G B* d'une anse de

panier, est composée de la surface d'un cercle qui a la corde GB pour rayon, d'une zone sphérique qui a même rayon AF & même hauteur GE que l'arc AG, & du produit $AG \times circ\, FC$. Ainsi pour avoir la superficie du dôme surbaissé, il faut trouver les valeurs de ces trois parties.

Soient tirés les rayons BK, GK & le sinus GR de l'arc GB qu'on suppose de 30 degrés : on aura le sinus $GR = \frac{1}{2} GK$ ou $\overline{GR}^2 = \frac{1}{4} \overline{GK}^2$. Ainsi $\overline{KR}^2$ ou $\overline{GK}^2 - \overline{GR}^2 = \overline{GK}^2 - \frac{1}{4}\overline{GK}^2 = \frac{3}{4}\overline{GK}^2$; & par conséquent $KR = GK \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mais $BR = GK - KR$. On aura donc $BR = GK - GK \times \frac{\sqrt{3}}{2} = GK \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ & $\overline{BR}^2 = \overline{GK}^2 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$. Or (*Géom. n°.* 308.) $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$ étant le quarré de la différence des deux quantités 1 & $\frac{\sqrt{3}}{2}$, vaut le quarré de 1 qui est 1, plus le quarré de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, qui est $\frac{3}{4}$, moins deux fois le produit de 1 & de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire moins le produit $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ qui est $\sqrt{3}$.

Ainsi $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$, & $\overline{BR}^2$ ou $\overline{GK}^2 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \overline{GK}^2 \times (1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3})$.

Donc $\overline{GB}^2$ ou $\overline{BR}^2 + \overline{GR}^2 = \overline{GK}^2 \times (1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}) + \frac{1}{4}\overline{GK}^2 = \overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3})$.

Supposant que le diamètre est à la circonférence

comme 7 eſt à 22, on aura auſſi (*Géom. n°.* 602) le quarré du rayon à la ſurface du cercle comme 7 eſt à 22; c'eſt-à-dire qu'on aura la ſurface d'un cercle en multipliant le quarré de ſon rayon par $\frac{22}{7}$. Donc ſi l'on multiplie $\overline{GB}$ ou ſa valeur $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3})$ par $\frac{22}{7}$, le produit $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) \times \frac{22}{7}$ ſera la ſurface du cercle qui a GB pour rayon, ou la ſurface convexe du ſegment ſphérique engendré par l'arc GB.

Soit tiré le ſinus GE de l'arc AG qu'on ſuppoſe de 60 degrés: on trouvera ce ſinus $GE = \frac{1}{2} AF \times \sqrt{3}$ ou $AF \times \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Ainſi la zone ſphérique produite par la révolution de l'arc AG autour de l'axe FL étant (*Géom. n°.* 482) égale au produit $GE \times circ\, AF$, ſera exprimée par $AF \times \frac{1}{2} \sqrt{3} \times circ\, AF$. Mais en ſuppoſant que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura $circ\, AF = AF \times \frac{44}{7}$.

Donc $GE \times circ\, AF$, ou la zone ſphérique engendrée par la révolution de l'arc AG, eſt égale à $AF \times \frac{1}{2} \sqrt{3} \times AF \times \frac{44}{7} = \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} \times \frac{22}{7}$.

L'arc AG étant de 60 degrés, ſa longueur eſt égale à $AF \times \frac{22}{21}$; & comme $circ\, FC = FC \times \frac{44}{7}$, on aura $AG \times circ\, FC = AF \times \frac{22}{21} \times FC \times \frac{44}{7}$, ou $AF \times FC \times \frac{44}{21} \times \frac{22}{7}$.

Donc pour avoir la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé engendrée par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour de ſa montée CB, il faut d'abord trouver les rayons GK, AF des deux parties de la courbe génératrice, & la partie FC du diamètre de la baſe; puis ajoûter enſemble ces trois produits $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) \frac{22}{7}$, $\overline{AF}^2 \times \sqrt{3} \times \frac{22}{7}$, $AF \times FC \times \frac{44}{21} \times \frac{22}{7}$; ce qui donnera $[\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) + \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} + AF \times FC \times \frac{44}{21}] \times \frac{22}{7}$ pour la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé. *C. Q. F. T.*

Corollaire I.

Fig. 132. 184. Si pour $\sqrt{3}$ l'on prend $1,732$ qui n'en differe pas de la dix-millième partie d'une unité, on aura $2-\sqrt{3}=0,268$; & si l'on réduit en décimales la fraction $\frac{44}{21}$, on aura $\frac{44}{21}=2,095$,

& par conséquent $\left\{\begin{array}{l} \overline{GK}^2\times(2-\sqrt{3})=\overline{GK}^2\times 0,268 \\ \overline{AF}^2\times\sqrt{3} \quad =\overline{AF}^2\times 1,732 \\ AF\times FC\times\frac{44}{21}=AF\times FC\times 2,095 \end{array}\right\}$

On aura donc la superficie du dôme surbaissé, ou $[\overline{GK}^2\times(2-\sqrt{3})+\overline{AF}^2\times\sqrt{3}+AF\times FC\times\frac{44}{21}]\times\frac{22}{7}$ $=(\overline{GK}^2\times 0,268+\overline{AF}^2\times 1,732+AF\times FC\times 2,095)\times\frac{22}{7}$.

Ainsi connoissant le demi-diamètre AC de la base du dôme, & les rayons GK, AF des arcs qui composent sa courbe génératrice, on trouvera la superficie de ce dôme.

Corollaire II.

Fig. 132. 185. On a trouvé (*Géom. n°.* 618 & 619) $\left\{\begin{array}{l} GK=AC+(AC-CB)\times\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ AF=AC+(CB-AC)\times\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ FC= \quad (AC-CB)\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{array}\right.$

Mais ayant fait $\sqrt{3}=1,732$, on aura $\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1,366$,

& par conséquent $\left\{\begin{array}{l} GK=AC+(AC-CB)\times 1,366= \quad AC\times 2,366-CB\times 1,366 \\ AF=AC+(CB-AC)\times 1,366=-AC\times 0,366+CB\times 1,366 \\ FC= \quad (AC-CB)\times 1,366= \quad AC\times 1,366-CB\times 1,366. \end{array}\right.$

On aura donc $\left\{\begin{array}{l} \overline{GK}^2 \quad =\overline{AC}^2\times 5,598+\overline{CB}^2\times 1,866-AC\times CB\times 6,464 \\ \overline{AF}^2 \quad =\overline{AC}^2\times 0,134+\overline{CB}^2\times 1,866-AC\times CB\times 1, \\ AF\times FC=-\overline{AC}^2\times 0,5+\overline{CB}^2\times 1,866+AC\times CB\times 2,366, \end{array}\right.$

$$\& \begin{cases} \overline{GK}^2 \times 0,268 = \overline{AC}^2 \times 1,5 + \overline{CB}^2 \times 0,5 - AC \times CB \times 1,732 \\ \overline{AF}^2 \times 1,732 = \overline{AC}^2 \times 0,232 + \overline{CB}^2 \times 3,232 - AC \times CB \times 1,732 \\ AF \times FC \times 2,095 = -\overline{AC}^2 \times 1,0475 - \overline{CB}^2 \times 3,910 + AC \times CB \times 4,957. \end{cases}$$

Ajoûtant enſemble ces trois équations, on aura

$$\overline{GK}^2 \times 0,268 + \overline{AF}^2 \times 1,732 + AF \times FC \times 2,095 = \overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493.$$

& par conſéquent la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé, c'eſt-à-dire

$$(\overline{GK}^2 \times 0,268 + \overline{AF}^2 \times 1,732 + AE \times FC \times 2,095) \times \tfrac{22}{7}$$
$$= (\overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493) \times \tfrac{22}{7}.$$

Ainſi connoiſſant le rayon AC de la baſe de ce dôme & ſa montée CD, on trouvera ſa ſuperficie.

Exemple.

Suppoſons qu'un dôme ſurbaiſſé formé par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, ait une baſe de 20 pieds de diamètre ou de 10 pieds de rayon, & que ſa hauteur BC *ſoit de 7 pieds.* Fig. 132.

$$\text{On aura} \begin{cases} \overline{AC}^2 = 100 \text{ p}^{ds} \text{ quar. \& } \overline{AC}^2 \times 0,6845 = 68,45 \text{ p}^{ds} \text{ quar.} \\ AC \times CB = 70 \quad \& \; AC \times CB \times 1,493 = 104,51 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 172,96 \\ \overline{CB}^2 = 49 \quad \& - \overline{CB}^2 \times 0,178 = -8,722. \end{cases}$$

Ainſi $(\overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493) \times \tfrac{22}{7}$
$= 164,238$ p^ds^ quar. $\times \tfrac{22}{7} = 516,176$ p^ds^ quar.

Remarque I.

186. Lorſqu'un dôme ſurbaiſſé eſt un demi-ſphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe AB autour de la moitié BC de ſon petit axe, on peut avoir ſa ſuperficie par le moyen des logarithmes, comme on va l'expliquer. Fig. 133.

Les deux droites AC, BC, perpendiculaires l'une

à l'autre, étant les moitiés du grand axe & du petit axe du quart d'ellipse *AB* par lequel le demi-sphéroïde elliptique aplati est engendré; si l'on prend sur la moitié *AC* du grand axe un point *F* qui soit éloigné de l'extrémité *B* du petit axe d'une quantité égale à *AC*, c'est-à-dire si l'on fait *BF* = *AC*; & qu'après avoir élevé sur *AC* par le point *F* & par tant de points qu'on voudra de *FC* des perpendiculaires *FG*, *PR*, *QS*, &c. l'on fasse *FG* = *BF* = *AC*, *PR* = *BP*, *QS* = *BQ*, &c. enfin si par les points ainsi déterminés sur ces perpendiculaires on trace une courbe *BRSG*, cette courbe sera une portion d'*Hyperbole équilatère* dont la droite *BC* sera le demi-axe; & l'on aura la proportion suivante, que nous ne pourrions point démontrer sans donner une théorie assez étendue de l'ellipse & de l'hyperbole, ce qui nous écarteroit trop de notre sujet.

Comme le rectangle BCFD *Est à la surface convexe d'un cylindre qui auroit* AC *pour rayon & BC pour hauteur;* ou *Comme* CF *ou* BD, *Est à circ* AC;

Ainsi l'aire du quadrilatère mixtiligne BCFG,
Est à la surface du demi-sphéroïde elliptique aplati engendrée par la révolution du quart d'ellipse AB *autour de la moitié* BC *de son petit axe.*

D'où l'on conclurra que la surface de ce demi-sphéroïde est égale à $BCFG \times \frac{circ\ AC}{CF}$. Ainsi l'on auroit la superficie de ce demi-sphéroïde, si l'on connoissoit la valeur du quadrilatère mixtiligne *BCFG*.

Si le quadrilatère mixtiligne *BCFG* est divisé par une diagonale *CG* en deux parties *FCG*, *BCG*, la première

première partie FCG ſera un triangle qui aura pour valeur le produit $\frac{1}{2} FG \times CF$ ou $\frac{1}{2} AC \times CF$; & l'autre partie BCG appelée *Secteur hyperbolique* ſera égale au produit de $\overline{BC}^2 \times 2,302585$ multiplié par la moitié de la différence qu'il y aura entre le logarithme de $FG + CF$ ou de $AC + CF$ & le logarithme de BC; c'eſt-à-dire qu'on aura $BCG = \overline{BC}^2 \times 2,302585 \times \frac{1}{2} [\log(AC + CF) - \log BC]$: ce qu'on ne ſauroit démontrer ſans ſuppoſer la connoiſſance d'un grand nombre de propriétés de l'hyperbole & des logarithmes que nous ne pouvons point donner dans ce Traité.

Ainſi la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé en ellipſe ou d'un demi-ſphéroïde elliptique aplati, engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe AB autour de la moitié BC de ſon petit axe, ſera égale à

$$\left\{\frac{1}{2} AC \times CF + \overline{BC}^2 \times 2,302585 \times \frac{1}{2} [\log(AC + CF) - \log BC]\right\} \times \frac{\text{circ } AC}{CF}$$

ou à $$\text{circ } AC \times \frac{1}{2} AC + \frac{\text{circ } AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2} [\log(AC + CF) - \log BC].$$

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un dôme ſurbaiſſé formé par la révolution d'un quart d'ellipſe AB *autour de la moitié* BC *de ſon petit axe, ait une baſe de* 20 *pieds de diamètre ou de* 10 *pieds de rayon, & une hauteur* BC *de* 7 *pieds.* Fig. 133.

Puiſque le demi-diamètre AC de la baſe eſt de 10 pieds, ſi l'on ſuppoſe que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura $\text{circ } AC \times \frac{1}{2} AC$ ou $\frac{44}{7} AC \times \frac{1}{2} AC = 314,2857$ pieds quarrés.

Et puiſqu'on ſuppoſe $AC = 10$ pieds & $BC = 7$ pieds, on aura $\overline{AC}^2 = 100$ pieds quarrés, $\overline{BC}^2 = 49$ pieds quarrés, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ ou $\overline{CF}^2 = 51$ pieds quarrés, & par con-

séquent $CF = 7,14143^{\text{pieds}}$. Cela posé, si l'on suppose encore que le rayon est à la circonférence comme 7 est à 44, on aura

$$\frac{circ\ AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 = \frac{44}{7} \times \frac{10 \times 49}{7,14143}^{\text{pieds quar.}} \times 2,302585$$

$$= \frac{3080}{7,14143}^{\text{pieds quar.}} \times 2,302585 = 993,0073^{\text{pieds quarrés.}}$$

Comme $AC + CF = 10 + 7,14143 = 17,14143$ & $BC = 7$, on aura $log\,(AC + CF)$ ou $log\,17,14143 = 1,23405$, & $log\,BC$ ou $log\,7 = 0,845105$ & par conséquent $\frac{1}{2}\,[log\,(AC + CF) - log\,BC] = 0,19447$.

On aura donc $\frac{circ\ AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}\,[log\,(AC + CF) - log\,BC]$

$= 993,0073^{\text{pieds quar.}} \times 0,19447 = 193,1101.$

Ainsi $circ\ AC \times \frac{1}{2}AC + \frac{circ\ AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}\,[log(AC + CF) - log\,BC]$

$= 314,2857^{\text{pieds quar.}} + 193,1142^{\text{pieds quar.}} = 507,4^{\text{pieds quar.}}$

c'est-à-dire que la surface du dôme surbaissé proposé sera de $507,4^{\text{pieds quarrés.}}$

REMARQUE II.

187. L'usage où l'on est de n'admettre dans le toisé que des règles expéditives, & de rejeter toutes les formules un peu compliquées qui peuvent échapper de la mémoire, fera sans doute regarder comme impraticables le Problème qu'on vient de résoudre, ses Corollaires, & la Remarque qui les suit. Mais si l'on considère que ce Problème, ces Corollaires & cette Remarque, sont des moyens pour connoître de combien est l'erreur que l'on fait dans le toisé des dômes ou culs de four surbaissés, en suivant les règles reçûes dans la pratique ou celles que l'on peut imaginer; on conviendra qu'elles sont utiles en ce qu'elles aideront & guideront même dans le choix des pra-

tiques convenables pour toiser ces dômes avec toute la précision qu'on peut raisonnablement demander.

Nous ne parlerons point ici des méthodes dont les toiseurs font usage, parce que nous n'en connoissons point qui donnent la superficie des dômes surbaissés avec assez de précision pour mériter d'être examinées, ou comparées aux règles qui viennent d'être expliquées ; mais nous en proposerons une aussi simple qu'on la peut désirer, & par laquelle on trouvera la superficie d'un dôme surbaissé avec une exactitude suffisante pour la pratique, dans le cas où sa hauteur ne sera pas moindre que le quart du diamètre de sa base : & comme il est extrêmement rare qu'on fasse des dômes plus surbaissés, cette méthode pourra presque toûjours avoir lieu. La voici.

On ajoûtera à la montée BC *du dôme les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre* AC *de sa base ; puis on multipliera cette somme par la circonférence de la base ; & le produit sera, à peu de chose près, la valeur de la superficie du dôme surbaissé.* Fig. 133.

Cette règle est fondée sur ce que l'arc d'hyperbole BG peut être regardé comme un arc de parabole cubique, dont BC est l'axe, & dont le segment extérieur BGD est égal à $\frac{2}{5} DG \times CF$ ou $\frac{2}{5}(AC - BC) \times CF$. Car, cela posé, on aura le quadrilatère mixtiligne $BCFG$ ou $BCFD + BGD = BC \times CF + \frac{2}{5}(AC - BC) \times CF$. Ainsi multipliant chaque membre par $circ\ AC$ & divisant par CF, on aura la surface du dôme, ou $\frac{BCFG \times circ\ AC}{CF} = [BC + \frac{2}{5}(AC - BC)] \times circ\ AC$.

Pour prouver la justesse de cette méthode, il suffit

de comparer les toisés qu'on fera par son moyen avec ceux qu'on feroit par les règles qu'on a données dans le dernier Théorème, ses Corollaires & la Remarque qui les suit.

Fig. 133. *Supposons qu'un dôme surbaissé, formé par la révolution de la moitié d'une anse de panier ou d'un quart d'ellipse* AB, *ait une base de 20 pieds de diamètre ou de 10 pieds de rayon, & une hauteur* BC *de 7 pieds.*

Suivant la méthode que nous venons de proposer pour la pratique, il faudra prendre les deux cinquièmes de la différence 3 pieds qu'il y a entre le demi-diamètre de la base du dôme & sa montée, ce qui donnera 1 $\frac{1}{5}$ pied qu'on ajoûtera à la montée supposée de 7 pieds, & l'on aura 8 $\frac{1}{5}$ pieds. Puis on multipliera cette somme par la circonférence de la base du dôme, c'est-à-dire par la circonférence d'un cercle de 10 pieds de rayon, ou par 62 $\frac{6}{7}$ pieds : ce qui produira 515 $\frac{3}{7}$ pieds quarrés pour la superficie du dôme surbaissé proposé.

Le même dôme ayant été considéré comme engendré par la révolution de la moitié d'une anse de panier, on a trouvé (*n*°. 185) 516 $\frac{1}{5}$ pieds quarrés à peu de chose près pour sa surface; & en le considérant comme produit par la révolution d'un quart d'ellipse, on a trouvé sa surface de 507 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés à peu de chose près. Ainsi la méthode qu'on vient de proposer pour la pratique, donne la surface d'un dôme surbaissé formé par la révolution de la moitié d'une anse de panier, avec toute la justesse qu'on peut raisonnablement demander.

Si l'on supposoit le demi-diamètre de la base du dôme de 10 pieds, & sa montée *BC* de 5 pieds, on trouveroit par la méthode qu'on vient de proposer

pour la pratique, la surface de ce dôme de 440 pieds q. On trouveroit (*n*°. 185) la surface du même dôme de $435\frac{1}{4}$ pieds quarrés, en supposant que ce dôme est engendré par la révolution d'une anse de panier; & de 434 pieds quarrés, en supposant qu'il est produit par la révolution d'un quart d'ellipse. Or la différence de ces deux dernières valeurs à celle qu'on a trouvée par la méthode qu'on a proposée pour la pratique, est assez petite pour être négligée dans les toisés.

Si le dôme avoit 10 pieds de rayon à sa base & 6 pieds de montée, la règle de pratique donneroit pour sa superficie $477\frac{5}{7}$ pieds quarrés; & supposant ce dôme engendré par la révolution de la moitié d'une anse de panier, on trouveroit sa superficie de $476\frac{1}{3}$ pieds quarrés.

Si le dôme surbaissé avoit à sa base un rayon de 10 pieds avec 8 pieds de montée, la règle de pratique donneroit sa superficie de $553\frac{1}{7}$ pieds quarrés; & l'on trouveroit (*n*°. 185) la même superficie de $554\frac{1}{4}$ pds q. à peu de chose près, en supposant le dôme produit par la révolution de la moitié d'une anse de panier.

Enfin si le dôme avoit une base de 10 pieds de rayon & une montée de 9 pieds, on trouveroit par la méthode de pratique sa superficie de $590\frac{6}{7}$ pieds quarrés; & par la méthode du n°. 185, où l'on suppose que le dôme est produit par la révolution de la moitié d'une anse de panier, la surface du même dôme seroit de $592\frac{1}{8}$ pieds quarrés, à peu de chose près.

PROBLEME.

188. *Trouver la superficie d'un dôme surmonté engendré par la révolution de la moitié* A G B *d'une anse de panier autour de son demi-diamètre* A C. Fig. 134.

SOLUTION.

On suppose, comme dans le Problème précédent, que la moitié *AGB* de l'anse de panier est composée d'un arc *GB* de 30 degrés qui a son centre *K* dans le prolongement de la ligne *BC* qui doit servir de rayon à la base du dôme, & d'un arc *AG* de 60 degrés qui a son centre *F* dans le demi-diamètre *AC*.

L'arc *AG* de 60 degrés étant terminé par son rayon *AF* qui fait partie du demi-diamètre *AC* autour duquel il doit tourner, engendrera dans sa révolution la surface d'un segment sphérique ; & (*Géom. n°.* 484) cette surface étant égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon la corde *AG* ou le rayon *AF*, sera exprimée par $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7}$, en supposant que le diamètre est à la circonférence, ou le quarré du rayon à la surface du cercle, comme 7 est à 22.

Si du centre de gravité *P* de l'arc *BG* de 30 degrés l'on abaisse une perpendiculaire *PQ* sur *BC*, la ligne *CQ* sera égale au rayon de la circonférence décrite par le centre de gravité *P* de l'arc *BG*. Ainsi (n°. 171) la zone engendrée par l'arc *BG* sera égale au produit $BG \times circ\ CQ$; & comme $CQ = KQ - CK$, & que $circ\ CQ = circ\ KQ - circ\ CK$, la même zone produite par la révolution de l'arc *BG* sera égale à $BG \times circ\ KQ - BG \times circ\ CK$.

Mais *K* étant le centre de l'arc *BG*, le produit $BG \times circ\ KQ$ est une zone sphérique qui seroit engendrée par la révolution de l'arc *BG* autour d'un axe *KL* perpendiculaire au bout de son rayon *KB* ; & cette zone est égale au produit $GR \times circ\ KB$ de sa hauteur & de la circonférence du cercle qui auroit *KB* pour rayon.

Donc la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié *A G B* d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre *A C*, eſt égale à $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7} + GR \times circ\,KB - BG \times circ\,CK$.

La hauteur ou le ſinus *G R* de l'arc *B G* de 30 degrés étant égale à la moitié de ſon rayon *K B*, & ſuppoſant que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura

$$GR \times circ\,KB = \frac{KB}{2} \times KB \times \frac{44}{7} = \overline{KB}^2 \times \frac{22}{7}.$$

L'angle *K* du triangle rectangle *F C K* étant de 30 degrés, on aura $CK = CF \times \sqrt{3}$, & l'arc *B G* ſera la douzième partie de la circonférence qui a *K B* pour rayon; c'eſt-à-dire que $BG = \frac{11}{21}\,KB$. Ainſi $BG \times circ\,CK = \frac{11}{21}\,KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{44}{7} = KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$.

Donc pour avoir la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié *A G B* d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre *A C*, il faut trouver les rayons *A F*, *K B* des deux arcs *A G*, *B G* qui compoſent la courbe génératrice *A G B*, & la partie *F C* du demi-diamètre; puis ajoûter enſemble les deux produits $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7}$, $\overline{KB}^2 \times \frac{22}{7}$, & retrancher enſuite de leur ſomme le produit $KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$: ce qui donnera pour la ſuperficie du dôme ſurmonté dont il eſt queſtion, $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7} + \overline{KB}^2 \times \frac{22}{7} - KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$.
C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

189. Si l'on prend 1,732 pour la racine quarrée de 3, on trouvera $\sqrt{3} \times \frac{22}{21} = 1,814$. Ainſi la Fig. 134.

superficie du dôme surmonté, engendré par la révolution de la moitié AGB d'une anse de panier autour de son demi-diamètre AC, sera représentée par $(\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814) \times \frac{22}{7}$. Donc si l'on connoît la montée AC du dôme & les rayons AF, GK des arcs qui composent sa courbe génératrice, on trouvera par cette formule la superficie de ce dôme.

Corollaire II.

Fig. 134. 190. On a trouvé (*Géom. n°. 619*)

$$\begin{cases} KB = AC + (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ AF = AC + (CB - AC) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ CF = (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{cases}$$

Et puisqu'on a fait $\sqrt{3} = 1,732$, on aura $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1,366$;

& par conséquent KB ou $GK = AC \times 2,366 - CB \times 1,366$

$AF = -AC \times 0,366 + CB \times 1,366$

$CF = AC \times 1,366 - CB \times 1,366$.

Ainsi l'on trouvera

$\overline{KB}^2 = \overline{AC}^2 \times 5,598 + \overline{CB}^2 \times 1,866 - AC \times CB \times 6,464$

$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 \times 0,134 + \overline{CB}^2 \times 1,866 - AC \times CB \times 1,$

$-KB \times CF \times 1,814 = -\overline{AC}^2 \times 5,863 - \overline{CB}^2 \times 3,385 + AC \times CB \times 9,248$.

Ajoûtant ensemble ces trois équations, l'on aura

$\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814 = -\overline{AC}^2 \times 0,131 + \overline{CB}^2 \times 0,347 + AC \times CB \times 1,784$.

Et par conséquent la superficie du dôme surmonté, produit par la révolution de la moitié AGB d'une anse de panier autour du demi-diamètre AC, c'est-à-dire $(\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814) \times \frac{22}{7}$ $= (\overline{CB}^2 \times 0,347 - \overline{AC}^2 \times 0,131 + AC \times CB \times 1,784) \times \frac{22}{7}$.

Ainsi connoissant le demi-diamètre *CB* de la base du dôme surmonté & la hauteur *AC* de ce dôme, on trouvera sa superficie.

EXEMPLE.

Supposons qu'un dôme surmonté formé par la révolution d'une anse de panier ait une base de 14 *pieds de diamètre ou de* 7 *pieds de rayon, & que sa hauteur* AC *soit de* 10 *pieds.* Fig. 134.

$$\text{On aura}\begin{cases}\overline{CB}^2 = 49^{\text{pieds qu.}} & \& \ \overline{CB}^2 \times 0,347 = 17,003^{\text{pieds qu.}} \\ AC\times CB = 70 & \& \ AC\times CB\times 1,784 = 124,88 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{141,883} \\ \overline{AC}^2 = 100 & \& - \overline{AC}^2 \times 0,131 = -13,1.\end{cases}$$

Ainsi $\overline{CB}^2 \times 0,347 + AC\times CB\times 1,784 - \overline{AC}^2 \times 0,131 = 128,783^{\text{pieds q.}}$

Et par conséquent

$(\overline{CB}^2 \times 0,347 + AC\times CB\times 1,784 - \overline{AC}^2\times 0,131) \times \frac{22}{7} = 128,783 \times \frac{22}{7}$ ou $404,746^{\text{pieds quarrés}}$; c'est-à-dire que la superficie du dôme proposé est de $404\frac{3}{4}^{\text{pieds quarrés}}$ à peu de chose près.

REMARQUE I.

191. Lorsqu'un dôme surmonté est un demi-sphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipse *AB* autour de la moitié *AC* de son grand axe, on peut trouver sa superficie par le moyen de la quadrature d'une portion de cercle qui a pour rayon la hauteur *AC* du demi-sphéroïde, comme on va l'expliquer. Fig. 135.

Ayant décrit un quart de circonférence *ADG* qui ait pour rayon la hauteur *AC* du demi-sphéroïde alongé; si sur cette hauteur *AC* l'on prend un point *F* qui soit éloigné de l'extrémité *B* du petit axe

d'une quantité égale à AC, c'est-à-dire si l'on fait $BF = AC$, & que l'on mène sur AC par le point F une perpendiculaire FD qui rencontre le quart de circonférence en D, on aura la proportion suivante que nous ne pourrions point démontrer sans donner une théorie trop étendue de l'ellipse.

Comme le rectangle BCFD = CF × BC *Est à la surface convexe d'un cylindre qui auroit* BC *pour rayon &* BC *pour hauteur, c'est-à-dire à* circ BC × BC; ou *Comme* CF *Est à* circ BC; *à*

Ainsi l'aire du quadrilatère mixtiligne FCGD,
Est à la surface du demi-sphéroïde elliptique alongé, engendré par la révolution du quart d'ellipse AB *autour de la moitié* AC *de son grand axe.*

Ainsi la surface de ce demi-sphéroïde est égale à $FCGD \times \frac{circ\ BC}{CF}$; & par conséquent l'on auroit l'étendue de cette superficie, si l'on connoissoit la valeur du quadrilatère mixtiligne $FCGD$.

Soit divisé le quadrilatère mixtiligne $FCGD$ en deux parties FCD, DCG, par le rayon CD: la première partie FCD sera un triangle qui aura pour valeur $\frac{1}{2} BC \times CF$, parce que BF etant égal au rayon CD ou AC, les deux triangles FCD, FBC seront parfaitement égaux; & la seconde partie DCG sera un secteur circulaire qui aura pour valeur $\frac{1}{2} DG \times AC$.

Donc la superficie du dôme surmonté ou du demi-sphéroïde elliptique alongé, produit par la revolution du quart d'ellipse AB autour de AC, est égale à $(\frac{1}{2} BC \times CF + \frac{1}{2} DG \times AC) \times \frac{circ\ BC}{CF}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} BC \times circ\ BC + \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\ BC}{CF}$.

EXEMPLE.

Supposons qu'un dôme surmonté, formé par la révolution d'un quart d'ellipse AB *autour de la moitié* AC *de son grand axe, ait une base de* 14 *pieds de diamètre ou de* 7 *pieds de rayon, & que sa hauteur* AC *soit de* 10 *pieds.* Fig. 137.

Puisque le rayon $BC = 7^{\text{pieds}}$, si l'on suppose le rayon à la circonférence comme 7 est à 44, on aura $\frac{1}{2} BC \times circ\, BC = \frac{1}{2} BC \times \frac{44}{7} BC$, ou $\frac{22}{7} \overline{BC}^2 = 154^{\text{pieds quarrés}}$, & $circ\, BC = 44^{\text{pieds}}$.

Et puisqu'on suppose AC ou $BF = 10^{\text{pieds}}$, & $BC = 7^{\text{pieds}}$, on aura $\overline{BF}^2 = 100^{\text{pds q.}}$ $\overline{BC}^2 = 49^{\text{pds q.}}$ $\overline{BF}^2 - \overline{BC}^2$ ou $\overline{CF}^2 = 51^{\text{pieds quarrés}}$; & par conséquent $CF = 7,14143^{\text{pieds}}$. Cela posé, on aura

$$\frac{AC \times circ\, BC}{CF} = \frac{10 \times 44}{7,14143} \;\&\; \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\, BC}{CF} = \frac{DG \times 10 \times 22}{7,14143}.$$

Pour avoir la longueur de l'arc DG dont on sait que le sinus CF ou BD est de 7, 14143, on fera cette proportion :

Comme AC *ou* CD $= 10^{\text{pieds}}$,
Est à CF *ou* BD $= 7,14143^{\text{pieds}}$;
Ainsi le sinus total 10000000,
Est au sinus de l'arc DG, *qu'on trouvera de* 7141430.

Cherchant ce sinus dans les Tables, on trouvera qu'il appartient à un arc de $45^{d}\, 34'\, \frac{1}{3}$. Ainsi l'on trouvera l'arc DG par cette proportion;

$$360^{d} : 45^{d}\, 34'\, \tfrac{1}{3} :: circ\, AC \text{ ou } 62\tfrac{6}{7}^{\text{pieds}} : DG = 7,957^{\text{pieds}}.$$

On aura donc $\dfrac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\, BC}{CF}$

ou $\dfrac{DG \times 220}{7,14143} = 245,124^{\text{pieds quarrés}}$.

Ainsi $\frac{1}{2} BC \times circ\, BC + \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\, BC}{CF}$

$= 154^{\text{pieds qu.}} + 245,124^{\text{pieds qu.}}$ ou $399,124^{\text{pieds qu.}}$ c'est-à-dire que la surface du dôme surmonté proposé contient $399\frac{1}{8}^{\text{pieds quarrés}}$ à peu de chose près.

Remarque II.

192. Si les deux règles qu'on vient de donner pour toiser un dôme surmonté, soit qu'on le suppose engendré par la révolution de la moitié d'une anse de panier, ou par la révolution d'un quart d'ellipse, paroissent trop composées pour être mises en pratique, on pourra se servir de la méthode suivante qui donnera la surface d'un dôme surmonté avec toute la justesse qu'on peut raisonnablement desirer, lorsque sa montée ne surpassera pas le diamètre de sa base.

Fig. 155. *On retranchera de la montée* AC *du dôme les deux septièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre de la base; puis on multipliera le reste par la circonférence de la base : & le produit sera, à peu de chose près, égal à la superficie du dôme surmonté.*

Par exemple, si un dôme surmonté formé par la révolution de la moitié d'une anse de panier, a une base de 14^{pieds} de diamètre ou de 7^{pieds} de rayon, & que sa montée AC soit de 10^{pieds}; comme la différence du demi-diamètre à la montée sera de 3^{pieds}, les deux septièmes de cette différence vaudront $\frac{6}{7}^{\text{pieds}}$: ainsi l'on retranchera $\frac{6}{7}^{\text{pieds}}$ de la montée 10^{pieds}; & le reste $9\frac{1}{7}^{\text{pieds}}$ étant multiplié par la circonférence de la base, c'est-à-dire par 44^{pieds}, donnera $402\frac{2}{7}^{\text{pieds quarrés}}$ pour la superficie du dôme surmonté de 14^{pieds} de diamètre & de 10^{pieds} de montée.

On a trouvé la surface du même dôme de $404\frac{1}{4}$ p. q. en le supposant cintré en anse de panier, & de $399\frac{1}{8}$ pieds quarrés en le supposant cintré en ellipse.

Pour trouver la raison de cette opération, l'on mènera sur *C G* une perpendiculaire *G H* qui soit terminée par le prolongement de la droite *F D*; & l'on remarquera que *D I G* étant un arc de cercle considérablement plus petit que le quart de circonférence *A D G*, le triangle mixtiligne *D I G H* sera plus grand que le quart du rectangle *B H*; & que le même triangle mixtiligne *D I G H* étant plus petit qu'un triangle mixtiligne parabolique $DKGH = \frac{1}{3} BH$ (*n*°. 148), sera moindre que le tiers du même rectangle *B H*. De là on conclurra que pour avoir la valeur du quadrilatère mixtiligne *F C G D*, il faut retrancher du rectangle *C H* une partie plus grande que le quart & plus petite que le tiers du rectangle *B H*, & qu'on peut, sans craindre une erreur considérable, en retrancher les deux septièmes de *B H*, qui sont à peu près le milieu entre le tiers & le quart de ce rectangle.

Mais $CH = CG \times CF$ ou $AC \times CF$, & *B G* étant égal à $AC - BC$, on aura le rectangle $BH = (AC - BC) \times CF$ & $\frac{2}{7} BH = \frac{2}{7}(AC - BC) \times CF$. Ainsi l'on aura le quadrilatère mixtiligne *F C G D* ou $CH - \frac{2}{7} BH = AC \times CF - \frac{2}{7}(AC - BC) \times CF$ $= [AC - \frac{2}{7}(AC - BC)] \times CF$; & par conséquent la surface du dôme surmonté ou $FCGD \times \frac{circ\ BC}{CF}$ $= [AC - \frac{2}{7}(AC - BC)] \times circ\ BC$; c'est-à-dire que pour avoir la valeur de la superficie d'un dôme surmonté, avec l'exactitude qu'on peut rai-

sonnablement demander dans la pratique, on pourra retrancher de la montée AC les deux septièmes de la différence $AC - BC$ qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre de la base, & multiplier le reste par la circonférence de la base.

Des Voûtes en arc de cloître.

Fig. 136, 137, 138 & 139. 193. Nous avons dit (n°. 181) qu'une voûte en arc de cloître est une espèce de dôme à pans construit sur un plan rectiligne régulier ou non régulier, & que sa surface est composée d'autant de pans ASB, BSC, CSD, &c. que le plan de sa base a de côtés.

Le point S où aboutissent tous les pans de la voûte s'appelle *Sommet*; & la droite SR menée de ce sommet perpendiculairement sur la base $ABCD$ se nomme *Montée* ou *Axe* de la voûte.

Chacune des arêtes courbes SA, SB, SC, &c. où se raccordent les pans contigus de la voûte, est dans un plan mené par l'axe SR, & par conséquent perpendiculaire au plan de la voûte.

Si l'on coupe un pan quelconque ASB de la voûte par un plan SRM mené par l'axe SR perpendiculairement à la base AB de ce pan; ce pan ASB sera en plein cintre, ou surbaissé, ou surmonté, suivant que la section SM, qu'on appelle la *Cerce* de la voûte, sera un quart de circonférence, ou un quart d'ellipse qui aura RM pour la moitié de son grand axe & SR pour la moitié de son petit axe, ou un quart d'ellipse qui aura SR pour la moitié de son grand axe & RM pour la moitié de son petit axe.

Lorsqu'une voûte en arc de cloître est construite sur un plan régulier, tous ses pans sont égaux; en sorte que si l'un de ses pans est en plein cintre, ou surbaissé, ou surmonté, tous les autres pans sont pareillement en plein cintre, ou surbaissés, ou surmontés. Ainsi l'on reconnoîtra que tous les pans d'une voûte en arc de cloître sont en plein cintre, ou surbaissés, ou surmontés, & que la voûte elle-même est en plein cintre, ou surbaissée, ou surmontée, lorsque son axe *S R* sera égal à la ligne *R M* ou plus petit, ou plus grand que cette ligne tirée du centre *R* du plan perpendiculairement sur l'un *A B* de ses côtés.

Lorsqu'une voûte en arc de cloître n'est pas construite sur un plan régulier, par exemple si la voûte est construite sur un quarré long, ou sur un octogone qui ait alternativement un grand côté & un petit côté, tous les pans ne pourront pas être en plein cintre; mais quelques-uns pourront être en plein cintre pendant que les autres seront surbaissés ou surmontés. Cette voûte pourra aussi avoir des pans surbaissés & des pans surmontés; enfin tous ses pans pourront être ou surbaissés ou surmontés. Comme les pans de cette espèce de voûte ne seront pas égaux, il faudra trouver leur valeur séparément, puis les ajoûter ensemble pour avoir la surface de la voûte. Ainsi le toisé de toutes les voûtes en arc de cloître consiste à savoir trouver la superficie d'un pan quelconque en plein cintre, ou surbaissé, ou surmonté compris entre deux plans *S R A*, *S R B* qui se croisent dans l'axe *S R*.

194. Si l'on imagine qu'un pan quelconque *A S B* de voûte en arc de cloître est coupé suivant une

courbe *SNM* par un plan *SRM* mené par l'axe *SR* perpendiculairement à la baſe *AB* de ce pan, & ſi l'on conſidère que la ſurface de ce pan eſt compoſée d'une infinité de lignes ou d'élémens tels que *TV* parallèles à *AB*; on pourra ſuppoſer que tous ces élémens ſont engendrés par tous les points de la courbe *SNM* mûs parallèlement à la droite *AB* ou perpendiculairement au plan *SRM* de part & d'autre de ce plan, juſqu'aux deux plans *SRA*, *SRB* qui terminent le pan *ASB* : & comme les mouvemens de tous les points de l'arc *SNM* ou d'une portion quelconque *SN* de cet arc ſeront terminés par les deux plans *SRA*, *SRB*, le chemin parcouru par le centre de gravité *P* du ſyſtème de tous les points contenus dans la courbe *SNM* ou dans ſa portion *SN*, ſera une ligne droite parallèle à *AB* & compriſe entre les deux plans *SRA*, *SRB*.

Par la ligne *IK* parallèle à *AB*, & décrite par le centre de gravité *P* de la courbe *SNM*, ou d'une portion *SN* de cette courbe, ſoit imaginé un plan *IQK* parallèle à la baſe *ABCD* de la voûte : les droites *IQ*, *KQ*, *PQ*, ſuivant leſquelles le plan *IQK* ſera rencontré par les plans *SRA*, *SRB*, *SRM*, ſeront parallèles aux droites *AR*, *BR*, *MR*, ſuivant leſquelles la baſe de la voûte ſera coupée par les mêmes plans *SRA*, *SRB*, *SRM*. Ainſi les triangles *ARM*, *BRM* ſeront ſemblables aux triangles *IQP*, *KQP*.

Les triangles ſemblables *ARM*, *IQP* donneront $MR : AM :: PQ : PI$; & par conſéquent $PI = PQ \times \frac{AM}{MR}$.

Les triangles ſemblables *BRM*, *KQP* donneront

MR:

$MR : BM :: PQ : PK$, & par conséquent $PK = PQ \times \frac{BM}{MR}$.

On aura donc $PI + PK$ ou $IK = PQ \times \frac{AM + BM}{MR} = PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Mais (*n*°. 171) si *P* est le centre de gravité de la courbe *SM* ou du système de tous les points générateurs des élémens du pan *ASB* ou de ses deux parties *ASM*, *BSM*; les produits $SM \times PI$, $SM \times PK$, $SM \times IK$ feront égaux aux surfaces *ASM*, *BSM*, *ASB* engendrées par toutes les parties de la courbe *SM*, pendant que le centre de gravité *P* de leur système parcourra les lignes *PI*, *PK*, *IK*. Ainsi les produits $SM \times PQ \times \frac{AM}{MR}$, $SM \times PQ \times \frac{BM}{MR}$, $SM \times PQ \times \frac{AB}{MR}$ seront aussi les valeurs des surfaces des deux parties *ASM*, *BSM*, & de la totalité *ASB* du pan. Cela posé, l'on va trouver la surface d'un pan de voûte en arc de cloître, soit en plein cintre, soit surbaissé, soit surmonté.

Pour un pan en plein cintre, de voûte en arc de cloître.

195. Lorsqu'un pan *A S B* sera en plein cintre, c'est-à-dire lorsque la courbe *SNM* sera un quart de circonférence, & que *P* sera son centre de gravité, on trouvera (*n*°. 77) $PQ = \frac{\overline{MR}^2}{SNM}$. Ainsi l'on aura $SNM \times PQ = \overline{MR}^2$; & par conséquent la surface du pan *ASB*, représentée par $SNM \times PQ \times \frac{AB}{MR}$, Fig. 136 & 137.

sera égale à $\overline{MR}^2 \times \frac{AB}{MR} = AB \times MR$, ou $AB \times SR$.

Chaque pan d'une voûte en arc de cloître en plein cintre étant égal au produit de la multiplication de la ligne AB qui sert de base à ce pan, par l'axe SR de la voûte; il est évident que la surface entière de cette voûte est égale au produit de la multiplication du contour $ABCD$ de sa base par son axe SR.

Comme le produit $AB \times MR$, qui est égal au pan en plein cintre ASB, vaut le double du triangle ARB qui répond perpendiculairement à ce pan, & qui peut être appelé le plan de ce pan; il est clair que chaque pan en plein cintre est double de son plan, & que la superficie entière d'une voûte en arc de cloître en plein cintre, ou composée de pans en plein cintre, est double de la superficie de son plan.

Si le point P est le centre de gravité de la portion de courbe SN ou du système de tous les points qui engendrent la portion de pan TSV, & que IK soit le chemin parcouru par ce centre de gravité P, on aura la surface de la portion $TSV = SN \times IK$: & comme $IK = PQ \times \frac{AB}{MR}$, on aura la portion de pan $TSV = SN \times PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Si TSV est une portion de pan en plein cintre, & que par le point N on mène NO perpendiculairement à l'axe SR, on trouvera (n°. 77) $PQ = \frac{MR \times SO}{SN}$ ou $\frac{SR \times SO}{SN}$; & par conséquent $SN \times PQ = MR \times SO$. Ainsi l'on aura la surface de la portion de pan TSV en plein cintre, ou

$SN \times PQ \times \frac{AB}{MR} = MR \times SO \times \frac{AB}{MR} = AB \times SO$; c'eſt-à-dire qu'une portion de pan TSV terminée par une droite TV parallèle à la baſe AB du pan, eſt égale au produit de cette baſe AB multipliée par la portion d'axe SO terminée par la ligne NO perpendiculaire à cet axe.

Si tous les pans de la voûte en arc de cloître étoient tronqués par un plan mené par la droite TV parallèlement à la baſe $ABCD$ de la voûte, chaque portion de pan ſupérieure au plan de ſection ſeroit égale au produit de la baſe de ce pan multipliée par SO. Ainſi la ſurface de toute la portion de la voûte ſupérieure au plan de ſection, ſera égale au produit du contour $ABCD$ de la baſe, multiplié par SO.

Puiſque le pan en plein cintre $ASB = AB \times SR$, & que ſa portion $TSV = AB \times SO$, il eſt clair que ſa portion $ABVT = AB \times OR$.

Et puiſque toute la voûte en plein cintre eſt égale au produit du contour de ſa baſe $ABCD$ & de ſon axe SR, & qu'après avoir coupé cette voûte par un plan parallèle à ſa baſe, toute la portion de voûte ſupérieure au plan de ſection eſt égale au produit du contour $ABCD$ de la baſe multiplié par la portion SO de l'axe ſupérieure au plan de ſection; il eſt clair que la portion de voûte inférieure au plan de ſection eſt égale au produit du contour de la baſe $ABCD$ multiplié par la portion d'axe OR inférieure au plan de ſection.

On peut conclurre de là que toute portion de voûte en arc de cloître, compriſe entre deux plans parallèles à ſa baſe $ABCD$, eſt égale au produit du contour de cette baſe $ABCD$ multiplié par la portion

d'axe comprise entre ces deux plans parallèles ; & que chaque portion de pan comprise entre les mêmes plans parallèles est égale à la base de ce pan multipliée par la portion d'axe comprise entre ces plans parallèles.

Si l'on se rappelle ce qui a été dit dans les Elémens de Géométrie au sujet de la surface de la sphère, de la surface d'un segment, & de celle d'une zone comprise entre deux plans parallèles ; on reconnoîtra aisément que les méthodes qu'on a données pour toiser ces surfaces, peuvent servir à toiser celles d'une voûte en arc de cloître en plein cintre, celles de ses portions comprises entre son sommet ou sa base & un plan parallèle à la base, & celles de toutes les parties contenues entre deux plans parallèles à la base.

PROBLEME.

196. *Trouver la surface d'un pan surbaissé ou surmonté de voûte en arc de cloître.*

SOLUTION.

Fig. 138 & 139. Un pan surbaissé ou surmonté de voûte en arc de cloître peut être cintré en anse de panier ou en ellipse ; c'est-à-dire que la rencontre *S M* de ce pan avec le plan *S R M* mené par l'axe *S R* perpendiculairement sur la base *A B* de ce pan, peut être une moitié d'anse de panier ou un quart d'ellipse. Ainsi il est à propos de résoudre le Problème pour ces deux cas, & de déduire de leurs solutions, qui seroient trop embarrassantes dans la pratique, des méthodes plus simples qui, quoique moins exactes, peuvent faire trouver l'étendue de la surface demandée avec toute la justesse qu'on peut raisonnablement desirer pour les toisés.

On a vû (*n°.* 194) que (quelle que soit la courbe *SM* dont on suppose que le centre de gravité *P* décrit la ligne *IK*, pendant que le pan *ASM* est engendré) la surface du pan *ASM* sera représentée par

$$SM \times IK = SM \times PQ \times \frac{AB}{RM}.$$

Mais si la courbe *SM* tournoit autour de l'axe *SR*, & engendroit un dôme surbaissé ou surmonté, la surface de ce dôme seroit égale au produit $SM \times circ\ PQ$. Ainsi l'on aura cette proportion :

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Comme}\ SM \times circ\ PQ \\ \textit{Est à}\ SM \times PQ \times \frac{AB}{RM}\end{array}\right\} ou \left\{\begin{array}{l}\textit{Comme}\ circ\ PQ \times RM \\ \textit{Est à}\ PQ \times AB\end{array}\right\} ou \left\{\begin{array}{l}\textit{Comme}\ circ\ RM \\ \textit{Est à}\ AB;\end{array}\right.$$

Ainsi la surface d'un dôme surbaissé ou surmonté qui a même axe SR *& même diamètre* RM *qu'un pan* ASB *de voûte en arc de cloître,*

Est à la surface de ce pan ASB.

On aura donc la surface d'un pan surbaissé ou surmonté *ASB* de voûte en arc de cloître, en multipliant par $\frac{AB}{circ\ RM}$ la surface d'un dôme surbaissé ou surmonté de même diamètre & de même montée que ce pan.

Or si l'on suppose que le rayon est à sa circonférence comme 7 est à 44, c'est-à-dire si l'on suppose $circ\ RM = RM \times \frac{44}{7} = 2\ RM \times \frac{22}{7}$, on aura $\frac{AB}{circ\ RM} = \frac{AB}{2\ RM \times \frac{22}{7}}$; ainsi l'on trouvera la surface d'un pan surbaissé ou surmonté de voûte en arc de cloître, en divisant par $\frac{22}{7}$ la surface d'un dôme de même diamètre & de même montée que ce pan, & en multipliant le quotient par $\frac{AB}{2\ RM}$.

Cela posé, on va déterminer la surface d'un pan de voûte en arc de cloître relativement à son axe SR, à son demi-diamètre MR, & à sa base AB, dans le cas où la courbe SM est une moitié d'anse de panier, & dans celui où elle est un quart d'ellipse.

Pour un pan surbaissé, lorsque la courbe SM *est une moitié d'anse de panier.*

Fig. 138. 197. On trouvera (n°. 185) qu'en mettant RM pour AC & SR pour BC, la surface d'un dôme surbaissé qui auroit RM pour demi-diamètre, SR pour montée, & qui seroit engendré par la révolution d'une moité SM d'anse de panier, est égale à $(\overline{RM}^2 \times 0,6845 - \overline{SR}^2 \times 0,178 + RM \times SR \times 1,493) \times \frac{22}{7}$.

Ainsi divisant cette expression du dôme surbaissé par $\frac{22}{7}$, & multipliant le quotient par $\frac{AB}{2RM}$, on aura $(\overline{RM}^2 \times 0,6845 - \overline{SR}^2 \times 0,178 + RM \times SR \times 1,493) \times \frac{AB}{2RM}$ ou $(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493) \times \frac{1}{2} AB$, pour la surface d'un pan ASB surbaissé en anse de panier. C. Q. F. T.

EXEMPLE.

On propose de trouver la surface d'un pan surbaissé en anse de panier, dans lequel RM = 10 pieds, SR = 7 pieds, *&* AB = 20 pieds.

On aura
$RM \times 0,6845$ ou $10^{\text{pieds}} \times 0,6845 = 6,845^{\text{pieds}}$
$-\frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM}$ ou $-\frac{49 \text{ p.} \times 0,178}{10} = -0,872$
$SR \times 1,493$ ou $7^{\text{pieds}} \times 1,493 = 10,451$

Et $RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493 = 16,424^{\text{pieds}}$.

Ainsi $(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493) \times \frac{1}{2} AB$, ou $16,424^{\text{pieds}} \times 10^{\text{pieds}} = 164,24^{\text{pieds quarrés}}$; c'est-à-dire que la superficie du pan surbaissé proposé ASB contient $164 \frac{1}{4}$ pieds quarrés à peu de chose près.

Pour un pan surmonté, lorsque la courbe SM *est une moitié d'anse de panier.*

198. On trouvera (nº. 190) qu'en mettant RM pour BC & SR pour AC, la surface d'un dôme surmonté qui auroit RM pour demi-diamètre, SR pour montée, & qui seroit engendré par la révolution d'une moitié SM d'anse de panier, est égale à $(\overline{RM}^2 \times 0,347 - \overline{SR}^2 \times 0,131 + SR \times RM \times 1,784) \times \frac{22}{7}$. Fig. 139.

Ainsi divisant cette expression du dôme surmonté par $\frac{22}{7}$ & multipliant le quotient par $\frac{AB}{2RM}$, on aura $(\overline{RM}^2 \times 0,347 - \overline{SR}^2 \times 0,131 + SR \times RM \times 1,784) \times \frac{AB}{2RM}$,

ou $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} AB$

pour la surface du pan ASB surmonté en anse de panier.

Exemple.

On propose de trouver la surface d'un pan surmonté en anse de panier, dans lequel RM = 7 pieds SR = 10 pieds, & AB = 14 pieds.

On trouvera
$$\begin{cases} RM \times 0,347 \text{ ou } 7^{\text{pieds}} \times 0,347 = 2,429^{\text{pieds}} \\ -\frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} \text{ ou } -\frac{100\text{ p.} \times 0,131}{7} = -1,871 \\ SR \times 1,784 \text{ ou } 10^{\text{pieds}} \times 1,784 = 17,84 \end{cases}$$

Et $RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784 = 18,398^{\text{pieds}}$

Ainsi $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} AB$ ou 18, 398 ^{pieds} × 7 ^{pieds} = 128, 786 $^{pieds\ quarrés}$; c'est-à-dire que la surface du pan surmonté proposé ASB contient environ 128 $\frac{3}{4}$ $^{pieds\ quarrés}$.

Pour un pan surbaissé, lorsque la courbe SM est un quart d'ellipse.

Fig. 138. 199. Si l'on prend sur le demi-diamètre MR un point F qui soit éloigné du sommet S de la voûte d'une quantité égale à ce demi-diamètre, c'est-à-dire si l'on fait $SF = RM$, on trouvera (*n°.* 186) qu'en mettant RM pour AC, SR pour BC, RF pour CF, la surface du dôme surbaissé en ellipse qui auroit RM pour demi-diamètre, & SR pour axe, seroit égale à

$$circ\ RM \times \tfrac{1}{2} RM + circ\ RM \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2} [\log(RM + RF) - \log SR].$$

Ainsi (*n°.* 196.) en multipliant cette quantité par $\frac{AB}{circ\ RM}$, c'est-à-dire en la divisant par $circ\ RM$, & multipliant ensuite le quotient par AB, le résultat

$$AB \times \tfrac{1}{2} RM + AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2} [\log(RM + RF) - \log SR]$$

sera la surface du pan ASB surbaissé en ellipse. C. Q. F. T.

EXEMPLE.

Supposons qu'un pan ASB *surbaissé en ellipse ait une longueur* AB = 20 pieds, *un demi-diamètre* RM = 10 pieds, *& une montée* SR = 7 pieds.

Comme on trouvera (*n°.* 186) $RF = 7,14143$ ^{pieds}, & $\frac{1}{2} [\log(RM + RF) - \log SR] = 0,19447$,

on aura $AB \times \frac{1}{2} RM = 100^{\text{pieds quarrés}}$, &

$$AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2} [\log(RM + RF) - \log SR]$$

$$= 20^{\text{pieds}} \times \frac{49^{\text{pieds}}}{7,14143} \times 2,302585 \times 0,19447 = 61,45^{\text{pieds q.}}$$

Ainsi $AB \times \frac{1}{2} RM + AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2} [\log(RM + RF) - \log SR]$

$= 161,45^{\text{pieds quarrés}}$; c'est-à-dire que la superficie du pan proposé est de $161\frac{1}{2}^{\text{pieds quarrés}}$ à peu de chose près.

Pour un pan surmonté, lorsque la courbe SM *est un quart d'ellipse.*

200. Si du point R comme centre on décrit par le sommet S un quart de circonférence SHG, & qu'après avoir pris sur SR un point F qui soit éloigné du point M d'une quantité égale à SR, on mène par ce point F perpendiculairement sur SR, une droite FH qui rencontre le quart de circonférence en H; on trouvera (n° 191) que la surface d'un dôme surmonté en ellipse, qui auroit RM pour le rayon de sa base & SR pour hauteur, est égale à Fig. 135.

$$circ\, RM \times \tfrac{1}{2} RM + \frac{HG \times SR \times circ\, RM}{2\, RF}.$$

Ainsi (n°. 196) en multipliant cette quantité par $\frac{AB}{circ\, RM}$, c'est-à-dire en la divisant d'abord par $circ\, RM$, & la multipliant ensuite par AB, le résultat $AB \times \frac{1}{2} RM \times \frac{HG \times SR \times AB}{2\, RF}$ sera la valeur du pan ASB surmonté en ellipse. C. Q. F. T.

EXEMPLE.

Supposons qu'un pan surmonté en ellipse soit construit de manière que AB = 14 pieds, RM = 7 pieds, SR = 10 pieds.

On trouvera, comme dans l'exemple du n°. 191; $RF = 7,14143^{\text{pieds}}$, $HG = 7,957^{\text{pieds}}$. Cela posé, on aura $\frac{1}{2} AB \times RM = 49^{\text{pieds quarrés}}$ &

$$\frac{HG \times SR \times AB}{2RF} = \frac{7,957^{\text{pieds}} \times 10^{\text{pieds}} \times 14^{\text{pieds}}}{2 \times 7,14143^{\text{pieds}}} = 78^{\text{pieds q.}}$$

Ainsi l'on trouvera la surface du pan proposé *ASB*, savoir $\frac{1}{2} AB \times RM + \frac{HG \times SR \times AB}{2RF}$ $= 49^{\text{pieds quarrés}} + 78^{\text{pieds quarrés}} = 127^{\text{pieds quarrés}}$.

COROLLAIRE.

201. Comme les voûtes en arc de cloître construites sur des plans réguliers ou irréguliers ne peuvent être composées que de trois sortes de pans, savoir de pans en plein cintre, de pans surbaissés & de pans surmontés, & qu'on vient de donner des méthodes pour toiser ces trois espèces de pans; il est évident que ces méthodes sont suffisantes pour toiser toutes sortes de voûtes en arc de cloître.

REMARQUE.

Les méthodes qu'on vient de donner pour toiser les pans des voûtes en arc de cloître étant trop composées pour être mises en pratique, on remarquera, comme on a fait (*nos*. 187 & 192), qu'on peut leur substituer des règles extrèmement simples qui donneront les aires des pans surbaissés ou surmontés avec autant de justesse qu'on peut le souhaiter pour les toisés. Voici ces règles.

Pour toiser un pan surbaissé de voûte en arc de cloître.

202. On ajoûtera à la hauteur de l'axe *S R* les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cet axe & la perpendiculaire *R M* tirée du pied de l'axe sur la base *A B* du pan *A S B* qu'on voudra toiser; puis on multipliera cette somme par la longueur de la base *A B* du pan: & le produit sera la surface ou l'aire de ce pan. Fig. 138.

Supposons, par exemple, que dans le pan *A S B* qu'on veut toiser, l'on trouve *A B* = 20 pieds, *R M* = 10 pieds, *S R* = 7 pieds.

La différence qu'il y aura entre *R M* & *S R* sera de 3 pieds, & les deux cinquièmes de cette différence vaudront $1\frac{1}{5}$ pied. Ainsi on ajoûtera $1\frac{1}{5}$ pied à l'axe *S R* = 7 pieds, & l'on multipliera la somme $8\frac{1}{5}$ pieds par la base *A B* = 20 pieds; ce qui donnera 164 pieds quarrés pour la valeur de la surface du pan proposé *A S B*.

On a déjà trouvé la surface de ce pan de $164\frac{1}{4}$ *pieds quarrés en supposant qu'il est cintré en anse de panier; & de* $161\frac{1}{2}$ *pieds quarrés, en supposant qu'il est cintré en ellipse.*

Pour toiser un pan surmonté de voûte en arc de cloître.

203. On retranchera de l'axe ou montée *S R* les deux septièmes de la différence qu'il y aura entre cet axe & la perpendiculaire *R M* tirée de son pied sur la base *A B* du pan *A S B* qu'on voudra toiser; puis on multipliera le reste par la longueur de la Fig. 139.

base *AB* du pan : & le produit sera la valeur de ce pan.

Si l'on propose, par exemple, de toiser un pan *ASB*, dans lequel *AB* = 14 pieds, *RM* = 7 pieds, *SR* = 10 pieds :

La différence qu'il y aura entre *SR* & *RM* sera de 3 pieds, & les deux septièmes de cette différence vaudront $\frac{6}{7}$ pied. Ainsi l'on retranchera $\frac{6}{7}$ pied de la montée *SR* = 10 pieds ; & l'on multipliera le reste $9\frac{1}{7}$ pieds par *AB* = 14 pieds : ce qui donnera 128 pieds quarrés pour la valeur du pan proposé *ASB*.

On a déjà trouvé la surface de ce pan de $128\frac{3}{4}$ *pieds quarrés en le supposant surmonté en anse de panier ; & de 127 pieds quarrés en le supposant surmonté en ellipse.*

Des Voûtes d'arête.

Fig. 140, 141 & 142. 204. Lorsque deux berceaux *AEBCFD*, *AGDCHB* de même montée & construits sur un même plan *ABCD* se croisent, & que les parties de chaque berceau contenues dans l'autre berceau sont supprimées, nous avons dit (*n*°. 181) que les parties restantes des deux berceaux composent une *Voûte d'arête*.

Fig. 143. Il arrive souvent qu'on fait croiser un plus grand nombre de berceaux, & que l'on supprime les parties de chaque berceau qui sont au dedans des autres berceaux : alors ce qui reste de tous ces berceaux s'appelle aussi une *Voûte d'arête*.

Fig. 140, 141, 142 & 143. Les lignes courbes *AS*, *BS*, *CS*, *DS*, &c. où les surfaces des berceaux se rencontrent, s'appellent *Arêtes* de la voûte. Toutes ces arêtes doivent aboutir à un même point *S* qu'on appelle *Sommet* de la voûte

& chacune d'elles doit être dans un plan perpendiculaire au plan de la baſe de la voûte.

Puiſque tous les plans *ASR*, *BSR*, *CSR*, *DSR*, *&c.* dans leſquels ſont les arêtes de la voûte, ſont perpendiculaires au plan de ſa baſe *A B C D*, & paſſent par le ſommet *S* où aboutiſſent toutes les arêtes, ils ſe croiſent néceſſairement dans une même droite *S R* perpendiculaire au plan de la voûte, & qu'on appelle *Axe* ou *Montée* de la voûte.

Chaque portion *S B H C S* de la voûte d'arête, compriſe entre deux arêtes voiſines *B S*, *C S*, ſe nomme *Lunette* de voûte d'arête.

Une voûte d'arête eſt compoſée d'autant de lunettes que le plan de ſa baſe a de côtés. Si le plan de la baſe eſt un quadrilatère, la voûte a quatre lunettes ; ſi le plan eſt un hexagone, la voûte a ſix lunettes, & ainſi des autres.

On conſtruit ordinairement les voûtes d'arête ſur des plans dont le nombre des côtés eſt pair, afin que les arêtes priſes deux à deux ſoient oppoſées & contenues dans un même plan. Mais rien n'empêche qu'on ne conſtruiſe une voûte d'arête ſur un plan dont le nombre des côtés eſt impair : alors les arêtes de cette voûte ne ſont pas deux à deux dans un même plan.

Les lunettes d'une voûte d'arête ſont égales ou inégales ſuivant que le plan de la voûte eſt régulier ou non régulier. Il peut cependant arriver qu'une voûte d'arête conſtruite ſur un plan irrégulier, par exemple ſur une lozange, ait des lunettes égales. Ainſi lorſqu'on aura trouvé une lunette de voûte d'arête conſtruite ſur un plan régulier, il ſuffira de multiplier ſa valeur par le nombre des côtés du plan de la

voûte, pour avoir la ſuperficie de la voûte entière. Mais ſi la voûte n'eſt pas conſtruite ſur un plan régulier, on ſera obligé de chercher la valeur de chaque lunette en particulier, ou de chercher au moins la valeur de chaque lunette qui ne ſera pas égale à quelqu'une de celles qu'on aura toiſées.

On diſtingue trois ſortes de lunettes de voûte d'arête, les lunettes en plein cintre, les lunettes ſurbaiſſées, & les lunettes ſurmontées. Les lunettes en plein cintre ſont des portions de berceaux en plein cintre; les lunettes ſurbaiſſées ſont des portions de berceaux ſurbaiſſés; & les lunettes ſurmontées ſont des portions de berceaux ſurmontés.

Comme les voûtes d'arête les plus irrégulières ne peuvent être compoſées que de ces trois eſpèces de lunettes, il eſt clair qu'on ſaura toiſer toutes ſortes de voûtes d'arête lorſqu'on aura des méthodes pour toiſer les lunettes en plein cintre, les lunettes ſurbaiſſées & les lunettes ſurmontées.

Pour parvenir au toiſé d'une lunette quelconque *S B H C S* de voûte d'arête, on abaiſſera du ſommet de la voûte une perpendiculaire *S R* ſur ſon plan; & du point *R* où ce plan ſera rencontré, on imaginera deux droites *R B*, *R C* tirées aux extrémités *B*, *C* du diamètre de la lunette. La ligne *S R* qui eſt l'axe ou la montée de la voûte ſe nommera *Montée* de la lunette; le triangle *B R C* s'appellera *Plan* ou *Baſe* de la lunette; & les deux plans *S R B*, *S R C*, qui ſeront néceſſairement perpendiculaires au plan de la voûte, ſe nommeront *Plans des arêtes* de la lunette. Enfin ſi par l'axe *S R* de la voûte & par le milieu *L* du diamètre *B C* de la face de la lunette, on imagine un plan *S R L H*, la ligne *S H* où la ſuperficie

de la lunette sera rencontrée, se nommera *Longueur* de la lunette : & comme la droite *R L*, où la base de la lunette sera rencontrée par le même plan, sera égale à *S H*, on la nommera aussi *Longueur* de la lunette.

Une lunette *S B H C S* de voûte d'arête peut donc être considérée comme une portion de berceau comprise entre deux plans *S R B*, *S R C* menés par les extrémités du diamètre *B C* d'une face *B H C* de ce berceau, & par une ligne *S R* tirée dans la face opposée *M S N* du même berceau perpendiculairement au milieu du diamètre *M N* de cette face. Fig. 144, 145 & 146.

En considérant ainsi une lunette de voûte d'arête, on reconnoîtra aisément que le toisé de sa surface se réduit à retrancher d'un berceau de même longueur *S H* que cette lunette, deux pans *M S B*, *N S C* qui peuvent être regardés comme des pans ou des portions de pans de voûte en arc de cloître. Cela posé, on va donner des méthodes pour toiser une lunette de voûte d'arête en plein cintre, ou surbaissée ou surmontée.

Pour une lunette en plein cintre de voûte d'arête.

205. Si le berceau *B H C N S M* est droit & en plein cintre, ses faces opposées *B H C*, *M S N* seront des demi-cercles parallèles & perpendiculaires à sa longueur ; ainsi la surface convexe de ce berceau sera égale au produit de la demi-circonférence *B H C* multipliée par la longueur *S H* ou *R L* ou *M B*. Fig. 141.

Or en supposant que le diamètre d'un cercle est à sa circonférence comme 7 est à 22, on aura la demi-circonférence $BHC = \frac{11}{7} BC$; ainsi la surface

du berceau compris entre les deux demi-cercles parallèles BHC, MSN sera égale au produit $\frac{11}{7} BC \times MB$.

Mais la partie BSM du berceau pouvant être regardée comme une portion en plein cintre de pan de voûte en arc de cloître, sa surface sera égale au parallélogramme ML ou au double du triangle BRM (n°. 195); & l'autre partie CSN du berceau sera par la même raison égale au parallélogramme NL. Ainsi la somme des deux parties BSM, CSN qu'il faudra retrancher du berceau, pour avoir la lunette $SBHCS$, sera égale au parallélogramme $MBCN = BC \times MB$; parce que le berceau étant supposé droit, sa base $MBCN$ est un rectangle.

Donc la superficie de la lunette en plein cintre $SBHCS = \frac{11}{7} BC \times MB - BC \times MB = \frac{4}{7} BC \times MB$; c'est-à-dire que la surface d'une lunette $SBHCS$ en plein cintre est égale aux quatre septièmes du rectangle $MBCN$, ou aux huit septièmes du triangle BRC qui sert de base à cette lunette.

Si le berceau, quoiqu'en plein cintre, n'étoit pas droit, c'est-à-dire si le plan $MBCN$ de ce berceau n'étoit pas un parallélogramme rectangle, la surface de la lunette $SBHCS$ seroit encore égale aux huit septièmes de sa base triangulaire BRC. Car si l'on menoit par SR un plan SRO perpendiculaire à MB; la rencontre RO de ce plan avec la base $MBCN$ seroit perpendiculaire à MB, & sa rencontre SO avec la surface du berceau seroit un quart de cercle, puisqu'on suppose le berceau en plein cintre. Ainsi (n°. 195) la surface de MSB seroit égale au double du triangle MRB ou égale au parallélogramme oblique $ML = MB \times RO$.

La surface du quart de cylindre $SHBM$ seroit égale à

à $SO \times MB$: & comme on auroit $SO = \frac{11}{7} RO$, en supposant que le rayon est au quart de circonférence comme 7 est à 11, on trouveroit le demi-berceau $SHBM = \frac{11}{7} RO \times MB$.

On trouveroit donc la surface de la demi-lunette $SBH = \frac{11}{7} RO \times MB - RO \times MB = \frac{4}{7} RO \times MB$; c'est-à-dire qu'elle seroit égale aux quatre septièmes du parallélogramme ML ou aux huit septièmes de sa base triangulaire BRL.

Par la même raison, l'autre demi-lunette SCH seroit égale aux huit septièmes de sa base CRL.

Donc la lunette entière $SBHCS$ en plein cintre, qui fait partie d'un berceau oblique en plein cintre, est égale aux huit septièmes de sa base BRC.

Il suit de là qu'une voûte d'arête dont toutes les lunettes sont en plein cintre est égale aux huit septièmes de la superficie de son plan. Car chaque lunette est égale aux huit septièmes de sa base triangulaire ; & les bases triangulaires de toutes les lunettes composent ensemble la base entière de la voûte d'arête.

On remarquera que la face BHC *d'un berceau oblique en plein cintre n'est pas un demi-cercle, & qu'on appelle berceau en plein cintre tout berceau dont la coupe perpendiculaire à sa longueur est un demi-cercle.*

Pour une lunette surbaissée de voûte d'arête.

206. Une lunette surbaissée $SBHCS$ est une portion de berceau surbaissé coupé par deux plans SRB, SRC perpendiculaires à sa base $MBCN$ avec les conditions que nous avons expliquées (n°. 204). Ainsi pour avoir la surface de la lunette surbaissée $SBHCS$, il faut toiser le berceau compris entre les deux faces parallèles BHC, MSN; puis en retran- Fig. 145.

cher les valeurs des deux pans *M S B*, *N S C* qui peuvent être considérés comme des pans surbaissés de voûte en arc de cloître.

Si le berceau compris entre les deux plans parallèles *B H C*, *M S N* est droit, c'est-à-dire si le plan *M B C N* de sa base est un rectangle, la surface convexe de ce berceau sera égale à $BHC \times MB$. Mais en considérant la face *B H C* de ce berceau comme une anse de panier, on trouvera (*Géom. n°.* 627) que la longueur de cette anse *B H C* est égale à $\frac{12\,BL + 10\,LH}{7}$, ou à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7}$; ainsi la surface de ce berceau sera égale à $\frac{12\,BL + 10\,LH}{7} \times MB$, ou à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7} \times MB$.

Mais *M S B* pouvant être pris pour un pan ou pour une partie de pan de voûte en arc de cloître, surbaissé en anse de panier, sa surface sera (*n°.* 197) égale à

$$\left(RM \times 0{,}6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0{,}278}{RM} + SR \times 1{,}493\right) \times \tfrac{1}{2}\,MB;$$

& la surface de l'autre pan *N S C* étant égale à la même quantité, les deux pans *M S B*, *N S C*, qu'il faudra retrancher du berceau pour avoir la surface de la lunette *S B H C S*, seront ensemble égaux à

$$\left(RM \times 0{,}6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0{,}178}{RM} + SR \times 1{,}493\right) \times MB.$$

Ainsi retranchant cette quantité de la surface du berceau qu'on a trouvé égale à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7} \times MB$ ou à $(RM \times 1{,}7142 + SR \times 1{,}429) \times MB$, le reste

$$\left(RM \times 1{,}030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0{,}178}{RM} - SR \times 0{,}064\right) \times MB$$

sera la valeur de la lunette surbaissée *S B H C S*.

Si le berceau surbaissé avoit pour base un parallélogramme obliquangle $MBCN$, il faudroit le couper perpendiculairement à sa longueur MB par un plan SRO qui rencontreroit sa surface convexe en SO, & qui couperoit sa base suivant une droite RO perpendiculaire à MB. Considérant ensuite SO comme la moitié d'une anse de panier, on auroit la longueur de l'anse développée égale à $\frac{12\,RO + 10\,SR}{7}$, ou à $RO \times 1,7142 + SR \times 1,429$; & la surface convexe du berceau oblique seroit égale au produit $(RO \times 1,7142 + SR \times 1,429) \times MB$.

On trouveroit aussi que les deux pans MSB, NSC qu'il faut retrancher sont ensemble égaux à

$$\left(RO \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RO} + SR \times 1,493\right) \times MB.$$

Otant cette valeur des deux pans MSB, NSC de $(RO \times 1,7142 + SR \times 1,429) \times MB$, le reste

$$\left(RO \times 1,03 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RO} - SR \times 0,064\right) \times MB$$

sera la valeur de la lunette $SBHCS$ oblique & surbaissée.

EXEMPLE.

Supposons une lunette SBHCS *droite & surbaissée en anse de panier, dans laquelle* RM *ou* BL = 10 pieds, SR *ou* HL = 7 pieds, & MB *ou* SH = 10 pieds. Fig. 145.

On aura
$$\begin{cases} RM \times 1,030 = & 10,3 \text{ pieds} \\ \overline{SR}^2 \times 0,178 = 8,722 \text{ pieds } \& \ \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} = & 0,872 \\ -SR \times 0,064 = & -0,448 \end{cases}$$

$$\text{Et } RM \times 1,030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} - SR \times 0,064 = 10,724 \text{ pieds.}$$

$$\text{Ainsi } \left(RM \times 1,030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} - SR \times 0,064\right) \times MB = 107,24 \text{ pieds qui}$$

c'est-à-dire que la superficie de la lunette proposée *SBHCS* vaut environ $107\frac{1}{4}$ pieds quarrés.

REMARQUE.

Fig. 145. 207. La méthode pour trouver les deux pans *MSB*, *NSC* qu'il faut retrancher du berceau pour avoir la lunette *SBHCS*, étant trop difficile à mettre en pratique lorsque l'on considère ces pans comme cintrés en anse de panier, on se servira pour toiser ces deux pans de la méthode simple qu'on a donnée au n°. 202; ce qui n'empêchera pas de considérer le berceau comme s'il étoit surbaissé en anse de panier.

Ajoûtant à la montée *SR* de la lunette les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre *RM*, la somme sera $SR + \frac{2}{5}(RM - SR)$ ou $SR + \frac{2}{5}RM - \frac{2}{5}SR$ ou $\frac{2}{5}RM + \frac{3}{5}SR$; & multipliant cette somme par *MB*, le produit $(\frac{2}{5}RM + \frac{3}{5}SR) \times MB$ sera (*n*°. 202) la surface du pan *ASB*: & l'autre pan *NSC* étant de même valeur, le produit $(\frac{4}{5}RM + \frac{6}{5}SR) \times MB$ sera égal à la somme des deux pans *MSB*, *NSC* qu'il faudra retrancher de la surface du berceau pour avoir celle de la lunette surbaissée *SBHCS*.

Mais la surface du berceau surbaissé est égal à $\frac{12RM + 10SR}{7} \times MB$. Donc en retranchant de cette quantité ce que nous venons de trouver pour la somme des deux pans *MSB*, *NSC*, le reste $\frac{32RM + 8SR}{35} \times MB$ sera la valeur de la surface de la lunette surbaissée *SBHCS*.

C'est-à-dire qu'on aura la surface d'une lunette droite surbaissée, en prenant 32 fois son demi-diamè-

tre ou 16 fois son diamètre avec 8 fois sa montée, & en multipliant cette somme par la longueur de la lunette, puis divisant le produit par 35.

Supposons, par exemple, qu'une lunette droite surbaissée SBHCS *ait un diamètre* BC *de* $28\frac{4}{7}$ *pieds ou un demi-diamètre* RM *de* $14\frac{2}{7}$ *pieds, une montée* SR *ou* HL *de* 10 *pieds, & une longueur* MB *ou* SH *de* 7 *pieds.*

On ajoûtera 32 *RM* ou 16 *BC* = ... $457\frac{1}{7}$ pieds
Avec 8 *SR* = ... 80
Puis on multipliera la somme................ $537\frac{1}{7}$
Par la longueur *MB*, c'est-à-dire par......... 7
Et divisant par 35 le produit................ 3760 pieds quarrés

le quotient $107\frac{3}{7}$ pieds quarrés sera la valeur de la lunette proposée *SBHCS*.

Pour une lunette surmontée de Voûte d'arête.

208. Une lunette surmontée *SBHCS* est une portion de berçeau surmonté dont on a retranché deux pans *MSB*, *NSC* qui peuvent être toisés comme des pans surmontés de voûte en arc de cloître. Fig. 146.

Lorsque le berceau surmonté compris entre les deux plans parallèles *BHC*, *MSN* est droit, sa surface convexe est égale au produit $BHC \times MB$. Mais en considérant la courbure *BHC* de ce berceau comme une anse de panier, on trouvera sa longueur $BHC = \frac{10\,BL + 12\,HL}{7}$ ou $\frac{10\,RM + 12\,SR}{7}$.

Ainsi la surface convexe du berceau droit surmonté compris entre les deux plans parallèles *BHC*, *MSN*, est égale à $\frac{10\,RM + 12\,SR}{7} \times MB$, ou à $(RM \times 1,429 + SR \times 1,714) \times MB$.

On trouvera (n°. 198) la surface du pan *MSB* égale

à $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} MB$; & comme l'autre pan *NSC* est égal à la même quantité, on aura la somme des deux pans *MSB*, *NSC* égale à $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times MB$.

Ainsi retranchant cette valeur des deux pans *MSB*, *NSC* de celle qu'on a trouvée pour le berceau, le reste $(RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07) \times MB$ sera la valeur de la surface de la lunette droite *SBHCS* surmontée en anse de panier.

Si la lunette *SBHCS* étoit oblique, on couperoit son berceau perpendiculairement à sa longueur *MB* par un plan *SRO*, qui rencontreroit sa base dans une ligne droite *RO*; perpendiculaire à *MB*; ou bien l'on se contenteroit de tirer du milieu du diamètre du berceau une perpendiculaire *RO* sur la longueur ou la naissance *MB* de ce berceau; & l'on trouveroit que la surface de la lunette *SBHCS* oblique & surmontée en anse de panier seroit égale à $(RO \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RO} - SR \times 0,07) \times MB$.

Exemple.

Fig. 146. *Supposons qu'on veut toiser une lunette* SBHCS *droite & surmontée en anse de panier, dont le demi-diamètre* BL *ou* RM = 7 pieds, *la montée* HL *ou* SR = 10 pieds, *la longueur* SH *ou* MB = $14\frac{2}{7}$ pieds.

$$\text{On aura} \begin{cases} RM \times 1,082 \text{ ou } 7^{\text{pieds}} \times 1,082 = 7,574^{\text{pieds}} \\ \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} \text{ ou } \frac{100^{\text{pieds}} \times 0,131}{7} = 1,871 \\ -SR \times 0,07 \text{ ou } -10^{\text{pieds}} \times 0,07 = -0,7 \end{cases}$$

$$\text{Et } RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07 = 8,745^{\text{pieds}}$$

Ainsi $\left(RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07\right) \times MB$ ou $8,745^{\text{pieds}} \times 14\frac{2}{7}^{\text{pieds}} = 124,928^{\text{pieds quarrés}}$; c'est-à-dire que la surface de la lunette proposée *S B H C S* est de $125^{\text{pieds quarrés}}$ à peu de chose près.

REMARQUE.

209. La méthode pour toiser une lunette surmontée *S B H C S* devenant trop composée lorsque l'on considère la ligne de courbure des pans *M S B*, *N S C* comme une anse de panier; on pourra, dans la pratique des toisés, lui substituer une méthode plus simple qu'il est aisé de déduire de celle qu'on a donnée (*n°*. 203) pour toiser un pan surmonté de voûte en arc de cloître. Fig. 146.

Car si l'on retranche de la montée *S R* les deux septièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & la perpendiculaire *R M* tirée du pied de cette montée ou du milieu du diamètre sur *M B*, & qu'on multiplie le reste par *M B*, le produit $[SR - \frac{2}{7}(SR - RM)] \times MB$, ou $(SR - \frac{2}{7}SR + \frac{2}{7}RM) \times MB$, ou $(\frac{5}{7}SR + \frac{2}{7}RM) \times MB$ sera égal à la surface du pan *M S B*: & comme les deux pans *M S B*, *N S C* sont égaux, la somme des surfaces de ces deux pans sera égale à $(\frac{10}{7}SR + \frac{4}{7}RM) \times MB$.

Donc si cette valeur de la somme des deux pans surmontés *M S B*, *N S C* est retranchée de la valeur de la surface du berceau surmonté que nous avons trouvé égale à $\frac{12\,SR + 10\,RM}{7} \times MB$, le reste $\frac{(2\,SR + 6\,RM) \times MB}{7}$ sera la valeur de la lunette surmontée *S B H C S*.

Ainsi pour avoir la surface d'une lunette surmontée de voûte d'arête, on ajoûtera deux fois la montée avec six fois le demi-diamètre, ou trois fois le diamètre entier; & ayant multiplié le total par la longueur de la lunette, on prendra la septième partie du produit.

Supposons, par exemple qu'une lunette surmontée SBHCS *ait un diamètre* BC *de* 14 *pieds, ou un demi-diamètre* RM *de* 7 *pieds, une montée* SR *de* 10 *pieds, & une longueur* MB *de* $14\frac{2}{7}$ *pieds.*

On ajoûtera 2 *SR* =	....	20 pieds
Avec 6 *RM* =	....	42
Puis on multipliera la somme	....	62 pieds
Par la longueur *MB*, c'est-à-dire par	....	$14\frac{2}{7}$ pieds
Et du produit	....	$885\frac{5}{7}$ pieds quar.
Prenant la septième partie, on aura	....	$126\frac{26}{49}$ pieds qu.

ou environ $126\frac{1}{2}$ pieds quarrés pour la surface de la lunette surmontée *SBHCS*.

DE LA SOLIDITÉ DES VOUSTES.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les surfaces concaves des voûtes en berceau, des dômes, des voûtes en arc de cloître & des voûtes d'arête, soit qu'elles soient en plein cintre, ou surbaissées ou surmontées; ainsi il nous reste à parler des solidités des mêmes voûtes; & comme nous ne pouvons pas nous y arrêter autant que le sujet paroît le demander, nous nous contenterons d'indiquer les principales méthodes suivant lesquelles on peut les toiser.

De la solidité des Voûtes en berceau.

Fig. 147, 148 & 149. 210. Lorsqu'un berceau en plein cintre, ou surbaissé ou surmonté, a deux têtes opposées parallèles

& perpendiculaires à sa longueur, on trouve sa solidité en multipliant la superficie de l'une de ses têtes par sa longueur.

Si la tête de ce berceau est comprise entre un intrados *A E B* & un extrados *M O N* parallèles & terminés par une même droite *M N*, on aura la superficie de cette tête, en multipliant la moitié de la somme de l'intrados *A E B* & de l'extrados *M O N* par l'épaisseur *O E* ou *M A* de la voûte. Or comme on pourra toûjours prendre ces intrados & extrados parallèles pour des demi-circonférences de cercles ou pour des anses de panier, & qu'on a donné dans les Elémens de Géométrie des méthodes pour toiser les longueurs de ces espèces de courbes, on pourra toûjours trouver la superficie d'une tête de berceau en plein cintre ou surbaissé ou surmonté, comprise entre un intrados *A E B* & un extrados *M O N* parallèles & terminés par une même droite *M N*.

Si le berceau est surbaissé ou surmonté, & que l'intrados *A E B* & l'extrados *M O N* soient deux demi-ellipses, on trouvera la superficie de sa tête entière en retranchant la surface de la demi-ellipse intérieure *A E B* de la surface de l'autre demi-ellipse *M O N*; & l'on multipliera la surface de cette tête par la longueur du berceau, pour avoir la solidité de ce berceau. Fig. 148 & 149.

Si le berceau est compris entre deux murs *D M*, *C N*, en sorte que l'extrados *F O G* ne descende pas jusqu'à la droite *M N* qui termine l'intrados, & si l'on ne demande que le solide compris entre l'intrados *A E B*, l'extrados *F O G* & les faces intérieures *D A*, *C B* des deux murs; on ne multipliera que la portion de tête *A F O G B E A* par la longueur du ber-

ceau ; c'eſt-à-dire qu'après avoir trouvé la demi-couronne compriſe entre l'intrados *A E B* & l'extrados entier *M O N*, on en retranchera les deux demi-ſegmens *A M F*, *B N G*, & l'on multipliera le reſte par la longueur du berceau. Comme les demi-ſegmens *A M F*, *B N G* ſeront des demi-ſegmens de cercles ou d'ellipſes, on trouvera dans les Elémens de Géométrie des méthodes pour les toiſer.

De la ſolidité des Dômes & des Voûtes en arc de cloître.

Fig. 147, 148 & 149. 211. Si l'on imagine que deux quarts de cercles ou deux quarts d'ellipſes concentriques *AKE*, *MKO* terminés par les côtés d'un même angle *MKZ*, tournent autour d'un côté *K Z* de cet angle, ils engendreront deux demi-ſphères ou deux demi-ſphéroïdes elliptiques concentriques dont les profils ſeront repréſentés par les deux demi-cercles ou demi-ellipſes concentriques *A E B*, *M O N*; & le quart de couronne *A E O M* engendrera le ſolide d'un dôme en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté, dont la demi-couronne circulaire ou elliptique *A E B N O M* ſera le profil.

On peut donc regarder le ſolide d'un dôme en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté comme la différence de deux demi-ſphères ou de deux demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés ; & par conſéquent le toiſé de tous les dômes ſe réduit au toiſé des demi-ſphères & des demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés. Comme on a dans les Elémens de Géométrie une méthode pour toiſer les ſolidités des demi-ſphères, il ne reſte à parler que de celles des demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés.

Imaginons une demi-sphère qui ait même diamètre $A\ B$ que la base du demi-sphéroïde aplati ou alongé engendré par le quart d'ellipse $A\ K\ E$: cette demi-sphère, dont le profil sera représenté par le demi-cercle $A\ H\ B$, & le demi-sphéroïde produit par la révolution du quart d'ellipse $A\ K\ E$, auront un équateur commun dont $A\ B$ sera le diamètre. Et comme on a démontré (*n°.* 130) que Fig. 148 & 149.

Le diamètre, ou le rayon A K *de l'équateur commun à la sphère & au sphéroïde elliptique,*

Est à l'axe, ou au demi-axe K E *du sphéroïde elliptique ;*

Comme le solide de la demi-sphère dont A H B *est le profil,*

Est au solide du demi-sphéroïde elliptique aplati ou alongé dont A E B *est le profil :*

On aura le solide du demi-sphéroïde elliptique alongé ou aplati dont $A\ E\ B$ est le profil, en multipliant par $\frac{K\ E}{A\ K}$ le solide de la sphère dont $A\ H\ B$ est le profil.

Mais en représentant par $cer\ A\ K$ la surface du cercle qui a $A\ K$ pour rayon, on trouvera (*Géom. n°.* 486) le solide de la sphère dont $A\ H\ B$ est le profil égal à $cer\ A\ K \times \frac{2}{3} K\ H$ ou $cer\ A\ K \times \frac{2}{3} A\ K$. Ainsi le solide du dôme ou demi-sphéroïde aplati ou alongé dont $A\ E\ B$ est le profil, sera exprimé par $cer\ A\ K \times \frac{2}{3} A\ K \times \frac{K\ E}{A\ K}$ ou par $cer\ A\ K \times \frac{2}{3} K\ E$; c'est-à-dire que le solide d'un demi-sphéroïde elliptique aplati ou alongé est, de même que celui de la sphère, égal aux deux tiers du produit de sa base & de sa hauteur, ou égal aux deux tiers du cylindre qui

lui eſt circonſcrit. On eſt donc en état de toiſer les ſolides de tous les demi-ſphéroïdes elliptiques, & de trouver le ſolide d'un dôme qui n'eſt que la différence de deux demi-ſphéroïdes.

Fig. 150, 151 & 152. 212. Nous avons dit (*n*°. 181) qu'une voûte en arc de cloître eſt une eſpèce de dôme à pans conſtruit ſur un plan régulier ou non régulier. Ainſi de même que le ſolide d'un dôme peut être conſidéré comme la différence de deux demi-ſphères ou de deux demi-ſphéroïdes elliptiques, le ſolide d'une voûte en arc de cloître en plein cintre ou ſurbaiſſée ou ſurmontée, peut être regardé comme la différence de deux ſolides terminés par deux ſurfaces de voûte en arc de cloître; & par conſéquent le toiſé de ces voûtes ſe réduit à celui des ſolides qui ſont terminés par des ſurfaces de voûtes en arc de cloître en plein cintre ou ſurbaiſſées ou ſurmontées. On va démontrer qu'on trouvera ces ſolides de la même façon que ceux des demi-ſphéroïdes, en multipliant leurs baſes par les deux tiers de leurs hauteurs.

Imaginons un onglet *ABRS* du ſolide d'une voûte en arc de cloître, terminé par un pan *ASB* de cette voûte & par deux plans *SRA*, *SRB* menés par ſon axe *SR* & par deux arêtes *SA*, *SB*. Si cet onglet eſt coupé par un plan *SRM* perpendiculaire à la baſe *AB* du pan *ASB*, ce plan *SRM* ſera un quart de cercle ou un quart d'ellipſe, ſuivant que l'onglet dont il eſt queſtion ſera en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté; & l'on pourra conſidérer que le ſolide de cet onglet eſt compoſé de filets parallèles à *AB* terminés par les plans *SRA*, *SRB* & engendrés par tous les points du quart de cercle ou du quart d'ellipſe *SRM* mûs perpendiculairement

à ce plan. Ainsi le solide de l'onglet $ABRS$ sera égal au produit de la surface du plan SRM multipliée par le chemin que décrira le centre de gravité du système de tous les points de ce plan.

Par le centre de gravité P du plan SRM, imaginons une droite IK parallèle à AB & terminée par les plans SRA, SRB, cette droite IK sera le chemin du centre de gravité de tous les points du plan SRM, puisque les mouvemens de tous les points de ce plan sont terminés par les deux plans SRA, SRB. Ainsi le solide de l'onglet $ABRS$ sera représenté par $SRM \times IK$.

Imaginons un plan IQK mené par IK parallèlement à la base ARB de l'onglet : les lignes PQ, IQ, KQ, où ce plan sera coupé par les plans SRM, SRA, SRB, seront parallèles aux droites MR, AR, BR, où la base de l'onglet sera rencontrée par les mêmes plans : & comme on a fait la droite IK parallèle à AB, les triangles MRB, ARB seront semblables aux triangles PQK, IQK, & donneront $MR : PQ :: BR : KQ :: AB : IK$; d'où l'on tirera $IK = PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Si le plan SRM est un quart de cercle, on trouvera (n°. 85) $PQ = \frac{\overline{SM}^2}{3SNM}$. Mais alors on aura $SR = MR$, & $\overline{SM}^2$ ou $\overline{SR}^2 + \overline{MR}^2 = 2\overline{MR}^2$, & par conséquent $PQ = \frac{2\overline{MR}^2}{3SNM}$; d'où l'on tirera IK ou $PQ \times \frac{AB}{MR} = \frac{2MR \times AB}{3SNM}$. Fig. 150.

On aura aussi $SRM = \frac{1}{2} SNM \times SR$; ainsi $SRM \times IK = \frac{1}{2} SNM \times SR \times \frac{2MR \times AB}{3SNM}$ $= \frac{1}{3} SR \times MR \times AB$ ou $\frac{MR \times AB}{2} \times \frac{2}{3} SR$; c'est-à-dire que le solide de l'onglet $ABRS$ est égal au produit de sa base $ARB = \frac{MR \times AB}{2}$ multipliée par les deux tiers de sa hauteur SR.

Fig. 151 & 152. Si le plan SRM est un quart d'ellipse, & que du point R comme centre on décrive le quart de circonférence MO dont T soit le centre de gravité: ce centre de gravité T & celui P de l'ellipse seront dans une même droite PT parallèle à SR, ou perpendiculaire à MR (n°. 118). On aura donc (n°. 85) TV ou $PQ = \frac{\overline{MO}^2}{3MNO}$: & comme $\overline{MO}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{OR}^2$ ou $2\overline{MR}^2$, on aura $PQ = \frac{2\overline{MR}^2}{3MNO}$, & par conséquent IK ou $PQ \times \frac{AB}{MR} = \frac{2MR \times AB}{3MNO}$.

On aura aussi (n°. 111) MR ou $OR : SR :: ORM : SRM$, & par conséquent $SRM = \frac{ORM \times SR}{MR}$.

Et comme $ORM = MNO \times \frac{MR}{2}$, on aura $SRM = MNO \times \frac{SR}{2}$.

On aura donc $SRM \times IK$ ou $MNO \times \frac{SR}{2} \times \frac{2MR \times AB}{3MNO}$ $= \frac{2}{3} MR \times \frac{AB}{2} \times SR$ ou $\frac{2}{3} ARB \times SR$; c'est-à-dire que le solide de l'onglet $ABRS$ surbaissé ou surmonté est égal au produit de la multiplication des

deux tiers de sa base *ARB* par sa hauteur *SR*.

Puisqu'il est démontré que chaque onglet du solide terminé par la surface d'une voûte en arc de cloître en plein cintre ou surbaissée ou surmontée, est égal au produit de la multiplication des deux tiers de sa base par sa hauteur; il est clair que le solide entier terminé par la surface d'une voûte en arc de cloître, ou la somme des onglets qui composent ce solide, est égale au produit de la multiplication des deux tiers de la base de cette voûte par sa hauteur.

De la solidité des Voûtes d'arête.

213. Une voûte d'arête étant composée d'autant de lunettes que le plan de sa base a de côtés, & le solide de chaque lunette compris entre deux plans *ERB*, *ERC* menés par ses arêtes *SB*, *SC* perpendiculairement à sa base, pouvant être toisé séparément; on saura toiser le solide d'une voûte d'arête lorsqu'on aura une méthode pour toiser le solide d'une lunette comprise entre les plans de ses arêtes: & comme le solide d'une lunette de voûte d'arête est divisé en deux parties égales par un plan *ENLR* mené par son axe *SR* & par le centre *L* de sa face, il suffira d'avoir une méthode pour toiser le solide d'une demi-lunette comprise entre les deux plans *ENLR*, *ERB*. Fig. 153, 154 & 155.

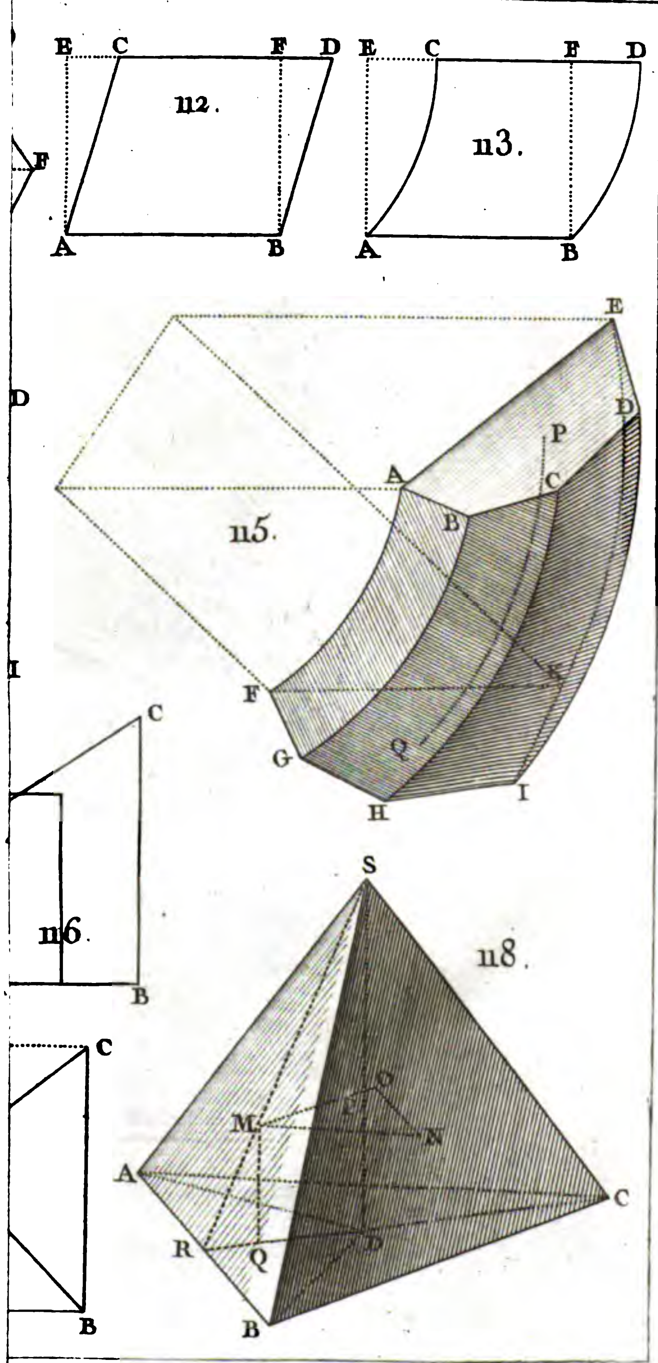
Imaginons le solide de la moitié de cette lunette composé d'une infinité de filets parallèles à sa longueur *RL* que nous supposerons perpendiculaire à sa face *NMB*, terminés par le plan *ERB* & par la face de la demi-tête *BHNM* de la lunette, & engendrés par tous les points de cette demi-face: le centre de gravité *P* du système de tous ces points décrira une

ligne parallèle à LR & comprise entre les deux plans SRB, NMB : & comme (*n*°. 171) le solide de la demi-lunette est égal au produit de la demi-face $BHNM$ multipliée par le chemin que décrit son centre de gravité P, le Problème pour trouver le solide de cette demi-lunette se réduit à trouver la superficie de la demi-face $BHNM$ & le chemin que décrit son centre de gravité P.

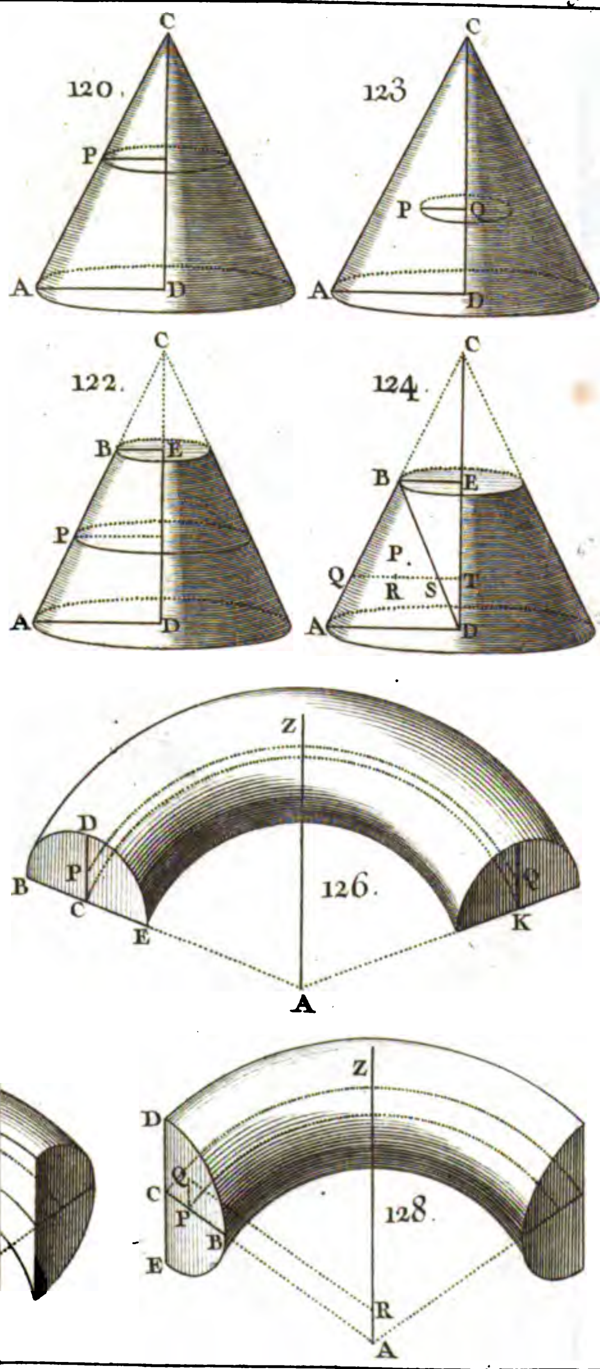
Comme nous avons donné des méthodes pour trouver les surfaces de toutes les figures rectilignes & de toutes les portions de cercles & d'ellipses, & pour trouver les centres de gravité de ces surfaces, on déterminera avec telle précision qu'on voudra l'aire de la demi-face $BHNM$ & la position de son centre de gravité P relativement à NL. Ainsi imaginant une perpendiculaire PQ au diamètre BC, on trouvera BQ; & supposant QT parallèle à LR, on fera cette proportion $BL : LR :: BQ : QT$, dont les trois premiers termes seront connus, & dont on tirera la valeur de la ligne QT qui est égale au chemin décrit par le centre de gravité P pendant la génération du solide de la demi-lunette.

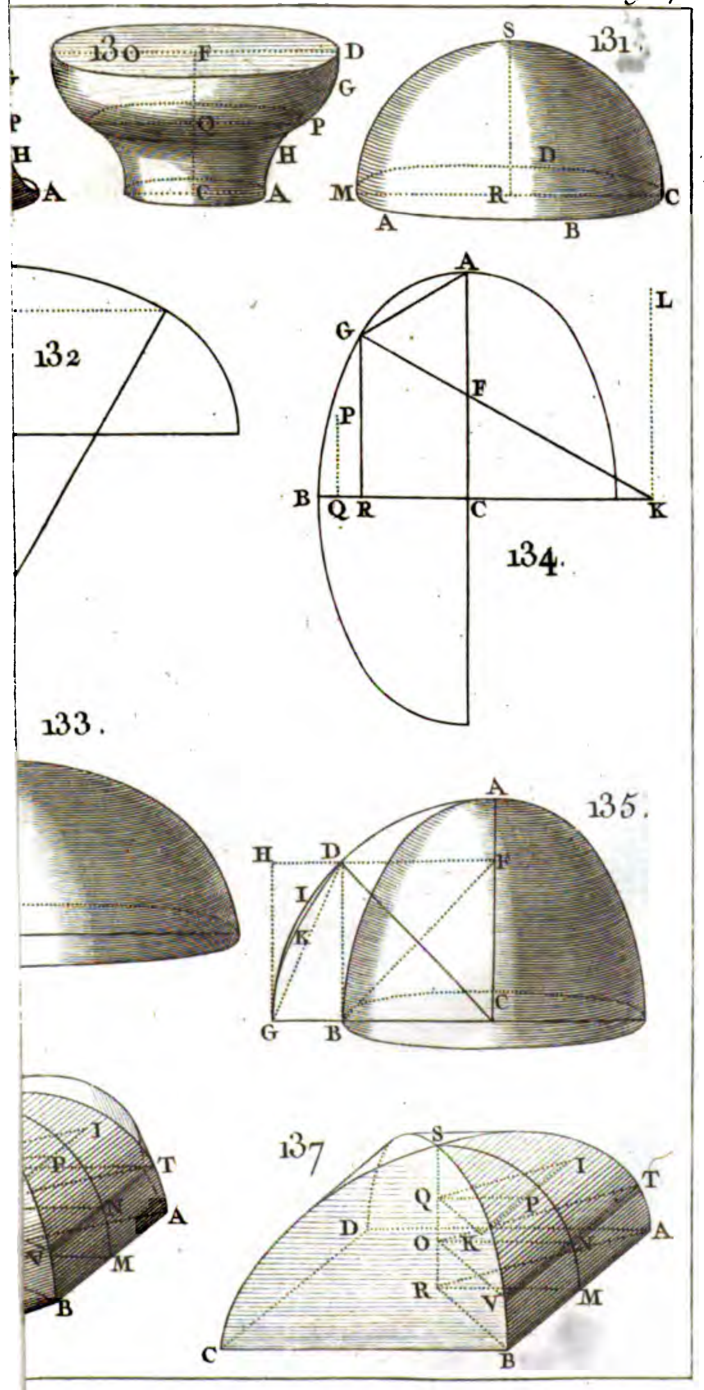


ÉLÉMENS



E C F D
112.
A B
E C F D
113.
A B
F
D
E
D
P
A
C
B
115.
F
G
Q
H
I
C
116.
B
C
B
S
118.
O
M
N
A
C
R
Q
D
B


C
120.
P
A
D
C
123
P
Q
A
D
C
122.
B
E
P
A
D
C
124.
B
E
P.
Q
R
S
T
A
D
Z
D
P
B
C
E
126.
Q
K
A
Z
D
Q
C
P
B
E
128.
R
A


130
F
D
G
P
O
P
H
H
A
C
A
131
S
D
M
R
C
A
B
A
L
G
132
F
P
B
Q
R
C
K
134.
133.
A
135.
H
D
F
I
K
C
G
B
I
T
P
N
A
V
M
B
137
S
I
T
Q
P
D
O
K
N
A
R
V
M
C
B

T A M

139

S I F H T Q P K D A V R M G C B

E A M

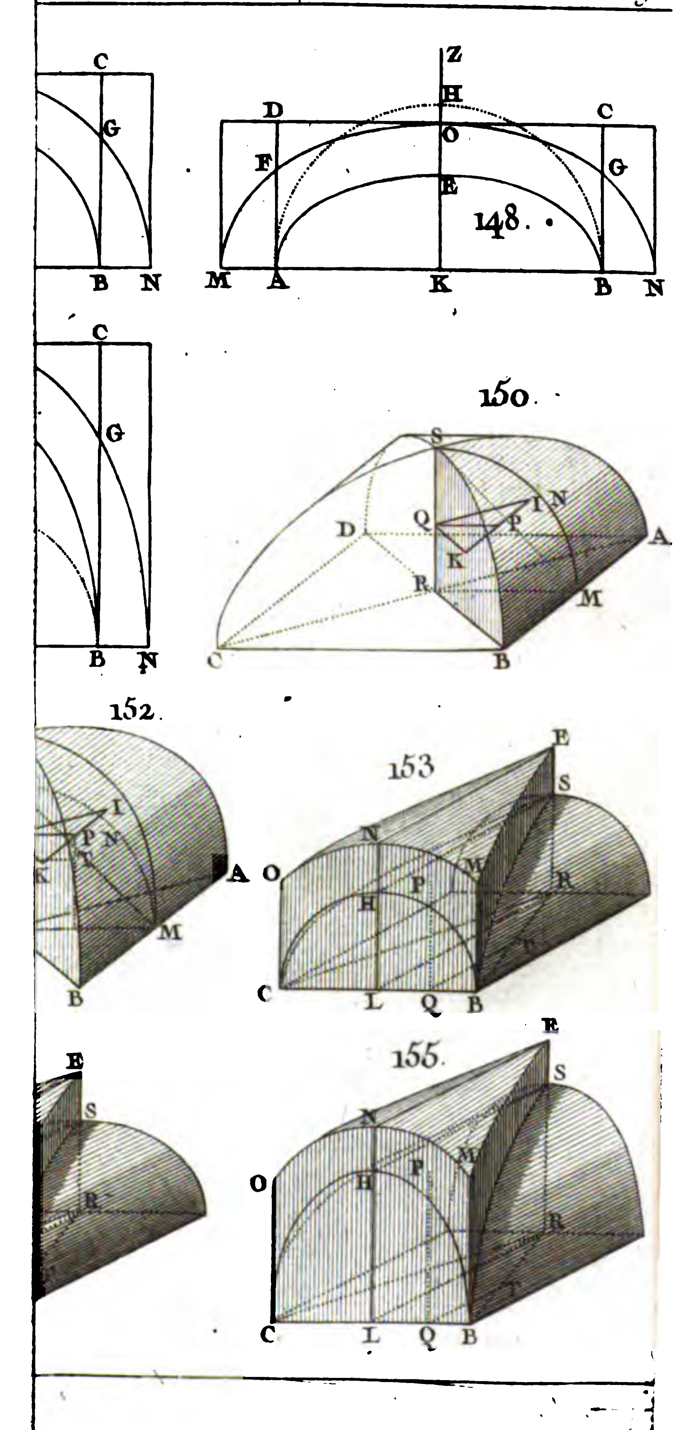
141. G S F B A D H R M C L B

E A

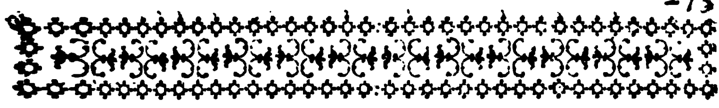
143. D S A R H C L B

145. S N R M H O L B

146 S H N R C L B



C
G
B
N
Z
H
D
C
O
F
G
E
148.
M
A
K
B
N
C
G
B
N
150.
S
I
N
Q
P
D
A
K
R
M
C
B
152.
I
P
N
K
A
M
B
E
153
S
N
O
M
P
H
R
C
L
Q
B
E
E
155.
S
S
N
M
O
P
H
R
R
C
L
Q
B



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE SECOND.

De la composition & décomposition des Forces.

214. LES règles qu'on va établir dans ce second Livre, au sujet de la composition & décomposition des forces, renferment presque toute la théorie de la Méchanique statique; en sorte que les Traités particuliers des sept machines, dont on parlera dans les sept Livres suivans, ne contiendront que des applications de ces règles à ces machines. Ainsi l'on ne doit point être surpris si les Théorèmes qu'on va démontrer & les Problèmes qu'on va résoudre pour la composition & décomposition des forces, paroissent en quelque manière répétés dans l'application qu'on en fera à chaque machine.

Ce Livre pourroit donc être regardé comme le premier de la Méchanique statique; & les notions préliminaires que l'on a données au commencement de ce Traité, conviennent plus particulièrement à ce Livre-ci & aux suivans, qu'à celui des centres de gravité, qui n'est en quelque sorte qu'une suite de la

théorie des leviers, & qui n'a été mis le premier que parce qu'il demande peu de principes, & qu'il auroit rempli le Traité du levier d'un trop grand nombre de propositions étrangères à cette machine.

On a dit dans les notions préliminaires, qu'un point sollicité à se mouvoir par tant de puissances qu'on voudra, qui lui seront appliquées toutes à la fois suivant des directions quelconques, ne peut aller que par un seul chemin, comme s'il n'étoit tiré ou poussé que par une seule force équivalente à toutes les puissances qui concourent à le mouvoir. Cet axiome est évident lorsqu'il ne s'agit que d'un point mobile qui n'a point de parties; mais il n'aura pas toûjours lieu lorsqu'il s'agira d'un corps auquel on appliquera différentes puissances qui seront toutes dans différens plans : ces puissances pourront donner à différentes parties de ce corps différens mouvemens, en sorte qu'elles ne pourront pas se réduire à une seule force capable du même effet.

Pour traiter cette matière avec plus d'ordre, nous la partagerons en deux Chapitres. Dans le premier, nous ne parlerons que de la composition & décomposition des forces qui sont dans un même plan, ou qui peuvent être toutes réduites à un même plan. Dans le second, nous parlerons de la composition des forces qui sont situées dans différens plans, & qui ne peuvent pas être réduites à un même plan ; & nous y ferons voir que ces forces, quel qu'en soit le nombre, peuvent toûjours être réduites à deux forces seulement dirigées dans deux plans différens.

CHAPITRE PREMIER.

De la composition & décomposition des Forces dont les directions sont dans un même plan ou peuvent être réduites à un même plan.

Définitions.

215. La force unique qui peut mouvoir un corps suivant la même direction & de la même façon que le mouvroient plusieurs autres forces appliquées à la fois, s'appelle *Force composée* ou *Force résultante* de toutes celles qui sont véritablement appliquées; & chacune des forces qui concourent à composer la force résultante peut être nommée *Force composante.*

La direction de la force composée ou résultante de plusieurs autres, s'appelle *Direction moyenne* ou *Direction composée* ou *Direction résultante.*

L'art de trouver la grandeur & la direction d'une force résultante de l'action de plusieurs autres, se nomme *Composition* de ces forces; & la manière de trouver les grandeurs & les directions de plusieurs forces, qui toutes ensemble feroient sur un corps le même effet qu'une force unique donnée, s'appelle *Décomposition* de cette force.

De même que (*notions prélim.*) les forces simples sont représentées par des lignes qui leur sont proportionnelles, & qui sont prises sur leurs directions; les forces composées seront aussi exprimées par des lignes prises sur leurs directions, & qui seront à

chacune des lignes par lesquelles on représentera les forces simples composantes, comme ces forces composées sont à leurs forces composantes; en sorte que si l'on compare toutes ces lignes par le moyen d'une même échelle dont les parties représentent des livres ou des marcs ou des onces &c. l'on connoîtra avec combien de livres ou de marcs ou d'onces &c. les puissances composantes & leur force résultante tirent ou poussent le corps auquel elles sont appliquées.

Fig. 156. 216. On a dit (*ax.* 4) que quand plusieurs puissances appliquées à un même corps ont la même direction, on peut les regarder comme une seule force égale à leur somme, & de même direction qu'elles. Ainsi lorsque deux puissances P, Q appliquées au même point A d'un corps K seront représentées, tant pour leurs forces que pour leurs directions, par deux parties AB, AC d'une même droite; si l'on prolonge AB d'une quantité $BD = AC$, en sorte que l'on ait $AD = AB + AC$, la résultante des deux puissances P, Q sera représentée par $AB + AC$ ou par AD, tant pour sa quantité de force que pour sa direction.

Fig. 157. 217. Lorsque deux puissances appliquées à un même corps ont des directions opposées, on a dit (*ax.* 5) qu'il en résultoit à ce corps une force égale à leur différence. Ainsi lorsque deux puissances P, Q appliquées au même point A d'un corps auront des directions contraires, & seront représentées par les parties AB, AC de leurs directions; si l'on prend sur l'expression AB de la plus grande, une partie $BD = AC$, en sorte qu'on ait $AD = AB - AC$, la résultante de ces deux puissances sera représentée

par $AB - AC$ ou par AD, tant pour sa quantité de force que pour sa direction.

Il n'y a donc aucune difficulté pour la composition des forces qui ont leurs directions suivant une même ligne droite, c'est-à-dire qui ont la même direction ou des directions contraires; & il est évident que la décomposition d'une puissance en plusieurs forces de même direction que cette puissance, n'a pas plus de difficulté, & ne mérite pas qu'on s'y arrête. On passe donc à la composition des forces qui ont différentes directions, mais qui sont dirigées dans un même plan.

THÉOREME.

218. *Lorsque deux puissances* P, Q *dirigées dans un même plan, & dont les directions concourent en quelque point* A, *sont appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* MN *droite ou courbe, soûtenue en équilibre au moyen d'un appui* F; *la droite* AF *tirée de leur point de concours à l'appui* F, *est la direction de la force résultante de ces deux puissances.* Fig. 158, 159 & 160.

DÉMONSTRATION.

Puisque les directions des deux puissances P, Q concourent en un point A, on pourra supposer (*Demande* 1) qu'elles sont toutes deux appliquées à ce point A commun à leurs directions, & regarder ce point A comme un point de la dépendance de la ligne inflexible MN, c'est-à-dire comme un point lié avec cette ligne de manière qu'il ne puisse pas être mû sans elle. On pourra donc supposer qu'il n'y a que le point A qui reçoive l'action des deux puissances P, Q: ainsi la force résultante de ces deux

puiſſances doit néceſſairement paſſer par ce point *A*.

Puiſque la ligne inflexible *MN* tirée par les deux puiſſances *P*, *Q* eſt arrêtée par l'appui *F*, & demeure en équilibre; l'obſtacle *F* au mouvement de cette ligne *MN* eſt (*ax.* 3) néceſſairement placé dans la direction de la force réſultante des deux puiſſances *P*, Q.

Donc la direction de la force réſultante des deux puiſſances *P*, Q paſſe par le point *A* & par le point *F*: & par conſéquent la droite *AF* menée par ces deux points eſt la direction de cette réſultante. C. Q. F. D.

REMARQUE.

Fig. 158, 159 & 160. 219. Comme les deux puiſſances *P*, Q ſont ſuppoſées dirigées dans un même plan, la ligne inflexible *MN* à laquelle elles ſont appliquées n'en peut recevoir de mouvement que ſuivant ce plan : ainſi l'appui *F* qui doit ſervir d'obſtacle au mouvement de cette ligne doit néceſſairement être dans le même plan; & par conſéquent la direction *AF* de la réſultante des deux puiſſances *P*, Q doit être dans le même plan que les directions de ces deux puiſſances.

THÉOREME.

Fig. 158, 159 & 160. 220. *Lorſque deux puiſſances* P, Q, *appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* MN *& dirigées dans un même plan, ſont en équilibre ſur un appui* F *qui s'oppoſe au mouvement de cette ligne; ſi du point d'appui* F *on mène des perpendiculaires* FE, FG *aux directions des deux puiſſances* P, Q, *ces perpendiculaires ſeront en raiſon réciproque des forces de ces deux puiſſances; c'eſt-à-dire qu'on aura* P : Q :: FG : FE.

DÉMONSTRATION.

Du point d'appui *F* comme centre, & d'un rayon égal à la perpendiculaire *FG*, ayant décrit dans le plan des directions des deux puissances *P*, Q un arc *G H* terminé par le prolongement de la perpendiculaire *FE*; si l'on imagine une puissance *K* égale à la puissance Q, & dont la direction soit parallèle à celle de la puissance *P*, c'est-à-dire perpendiculaire à *FH*, les deux puissances égales *K*, Q, dont les directions seront tangentes au même arc *G H*, seront également propres à contrebalancer la puissance *P* sur l'appui *F*: & puisque les deux puissances *P*, Q sont supposées en équilibre sur cet appui, les deux puissances *P*, *K* seront aussi en équilibre sur le même appui.

Or les deux puissances *P*, *K* ayant des directions parallèles, & pouvant être regardées comme des poids, seront (*n*°. 52) en raison réciproque des parties de la droite *E H* comprises entre l'appui F & leurs directions; c'est-à-dire qu'on aura *P* : *K* :: *FH* : *FE*.

Donc puisque les puissances Q, *K* sont supposées égales, on aura aussi *P* : Q :: *FH* : *FE* ou :: *FG* : *FE*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

221. Et réciproquement lorsque deux puissances *P*, Q appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible *M N* droite ou courbe, & dirigées dans un même plan, sont en raison réciproque des perpendiculaires *FE*, *FG* tirées de l'appui du levier sur leurs directions, ces puissances sont en équilibre sur cet appui. Fig. 158, 159 & 160.

Car si les deux puissances *P*, Q n'étoient pas en équilibre sur l'appui *F*, on pourroit, en augmentant

ou diminuant la puissance *P* d'une certaine quantité; la mettre en équilibre sur cet appui avec la puissance Q; & pour lors on auroit (*n°*. 52) une puissance plus ou moins grande d'une certaine quantité que la puissance *P*, à la puissance Q, comme *FG* est à *FE*.

Mais on suppose que *FG* est à *FE*, comme la puissance P est à la puissance Q. On auroit donc une puissance plus ou moins grande d'une certaine quantité que la puissance *P*, à la puissance Q, comme la puissance P est à la puissance Q: ce qui seroit absurde, à moins que la quantité dont la puissance P seroit augmentée ou diminuée ne fût zéro. Ainsi la puissance *P* ne doit être ni augmentée ni diminuée, pour être en équilibre avec la puissance Q.

THÉOREME.

Fig. 158, 159 & 160. **222.** *Lorsque deux puissances* P, Q *appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* M N, *& dirigées dans un même plan, sont en équilibre sur un appui* F; *si l'on méne par cet appui des droites* F C, F B *parallèles aux directions des puissances* P, Q, *en sorte que* A B F C *soit un parallélogramme, les deux puissances* P, Q *seront en même rapport que les côtés* A B, A C *de ce parallélogramme, pris sur leurs directions.*

DÉMONSTRATION.

Par le point d'appui *F* soient tirées des perpendiculaires *FE*, *FG* sur les directions des puissances P, Q qu'on suppose en équilibre: on a vû dans le dernier Théorème qu'on aura *P* : Q :: *FG* : *FE*.

Les deux triangles rectangles *FGC*, *FEB* seront semblables; car à cause de *FC*, *FB* parallèles à *AP*, *AQ*, chacun des deux angles *FCG*, *FBE* sera égal

à l'angle EAG : ainsi ces triangles semblables donneront $FG : FE :: FC : FB$ ou $:: AB : AC$.

Donc on aura $P : Q :: AB : AC$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

223. Et réciproquement lorsque deux puissances P, Q sont proportionnelles aux côtés AB, AC d'un parallélogramme, pris sur leurs directions, & que la diagonale AF de ce parallélogramme est dirigée vers l'appui F de la ligne inflexible à laquelle ces puissances sont appliquées; ces deux puissances sont en équilibre sur l'appui F. Fig. 158, 159 & 160.

Car puisque (*hyp.*) $P : Q :: AB : AC$, & qu'on vient de trouver $AB : AC$ ou $FC : FB :: FG : FE$, on a $P : Q :: FG : FE$. Ainsi (n°. 221) les deux puissances P, Q sont en équilibre.

COROLLAIRE II.

224. Si par un point quelconque f de la droite FA, ou du prolongement de cette ligne tirée de l'appui F au point A où concourent les directions des deux puissances P, Q, l'on mène deux parallèles fc, fb aux directions de ces puissances, on aura un second parallélogramme $Abfc$ semblable au premier $ABFC$ dont la diagonale se termine à l'appui F; ainsi ces deux parallélogrammes donneront cette proportion $Ab : Ac :: AB : AC$. Mais dans le cas où les deux puissances P, Q sont en équilibre sur l'appui F, on trouve (n°. 223) $AB : AC :: P : Q$. Donc on aura aussi $Ab : Ac :: P : Q$; c'est-à-dire que deux puissances P, Q en équilibre sont proportionnelles aux côtés Ab, Ac d'un parallélogramme, pris sur leurs directions, & sont par conséquent représentées Fig. 158, 159 & 160.

par ces côtés, lorsque la diagonale *Af* ou son prolongement passe par l'appui *F.*

Et réciproquement lorsque deux puissances P, Q sont proportionnelles aux deux côtés *Ab*, *Ac* d'un parallélogramme, pris sur leurs directions, & que la diagonale *Af* ou son prolongement passe par l'appui *F*; les deux puissances P, Q sont en équilibre sur cet appui.

THÉOREME.

Fig. 158, 159 & 160. 225. *Lorsque deux puissances* P, Q *sont représentées par les côtés* A b, A c *d'un parallélogramme* A b f c, *leur force résultante est dirigée suivant la diagonale* A f *de ce parallélogramme.*

Et réciproquement lorsque la force résultante de deux puissances P, Q *est dirigée suivant la diagonale* A f *d'un parallélogramme dont les côtés contigus* A b, A c *sont pris sur les directions de ces puissances; ces deux puissances* P, Q *sont proportionnelles aux côtés* A b, A c *de ce parallélogramme, & sont par conséquent représentées par ces côtés.*

DÉMONSTRATION.

PARTIE I. Puisqu'on suppose les deux puissances *P*, Q représentées par les côtés contigus *Ab*, *Ac* du parallélogramme *Abfc*, ces côtés (*notions prélim.*) sont proportionnels à ces puissances, & sont pris sur leurs directions. Donc si l'on imagine les puissances P, Q appliquées à une verge inflexible *MN* située dans le plan où sont les directions de ces puissances, & que sous cette ligne on place un appui *F* dans la direction de la diagonale *Af*, les puissances *P*, Q seront en équilibre sur cet appui (*n°.* 223); ainsi (*n°.* 218) leur résultante sera dirigée suivant la droite

AF ou FA menée par l'appui & par le point où concourent leurs directions, & sera par conséquent dirigée suivant la diagonale Af ou fA du parallélogramme $Abfc$ dont les côtés contigus Ab, Ac représentent les deux puissances P, Q. C. Q. F. 1°. D.

PART. II. La résultante des deux puissances P, Q étant supposée dirigée suivant la diagonale Af ou fA du parallélogramme $Abfc$ dont les côtés contigus sont sur les directions de ces puissances; si l'on imagine ces puissances appliquées à une verge inflexible MN située dans le plan de ces puissances, & que sous cette ligne on place un appui F dans la direction de la diagonale Af, les puissances P, Q seront en équilibre sur cet appui: ainsi (n°. 222) elles seront proportionnelles aux côtés contigus Ab, Ac du parallélogramme $Abfc$, & seront par conséquent représentées par ces côtés, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions. C. Q. F. 2°. D.

On doit remarquer que dans ce Théorème il s'agit seulement de la direction de la force résultante de deux puissances dont les directions sont dans un même plan & se croisent dans un point A, *& qu'il n'est point encore question de comparer la valeur de cette force résultante avec celles des deux puissances* P, Q *qui la composent. Mais on va démontrer dans les deux Théorèmes suivans que cette force résultante est toûjours représentée par la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus représentent les puissances composantes.*

THÉOREME.

226. *Lorsque deux puissances* P, Q *sont représentées, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions par les côtés contigus* A B, A C *d'un parallélogramme* Fig. 161.

rectangle A B F.C, *la résultante de ces deux puissances est représentée par la diagonale* A F *du même parallélogramme rectangle.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que la résultante des deux puissances *P*, Q représentées par les côtés contigus *A B*, *A C* du parallélogramme *A B F C*, est nécessairement dirigée suivant la diagonale *A F* de ce parallélogramme. Ainsi cette force résultante doit être représentée par une ligne droite prise sur cette diagonale.

Ayant imaginé que la résultante est représentée par une droite *A O* de longueur inconnue, plus longue ou plus courte que la diagonale *A F* sur laquelle elle est prise, & ayant tiré par le point *A* commun aux directions des deux puissances P, Q une droite *I L* perpendiculaire à la diagonale *A F*; supposons deux nouvelles forces dirigées suivant *A F*, *A I*, & représentées par deux parties *A D*, *A I* telles que l'on ait *A O* : *A B* : *A C* :: *A B* : *A D* : *A I*. Supposons encore deux autres forces dirigées suivant les droites *A L*, *A F*, & représentées par des parties *A L*, *A E* de ces lignes, de manière que l'on ait *A O* : *A B* : *A C* :: *A C* : *A L* : *A E*. Il est clair que

1°. Les deux forces représentées par *A D*, *A I* seront disposées par rapport à la puissance P représentée par *A B*, de la même manière que les deux puissances *P*, Q représentées par *A B*, *A C* sont disposées par rapport à leur résultante *A O*. Car *A D* fait avec *A B* le même angle que *A B* fait avec *A O*, & l'angle *I A B* que *A I* fait avec *A B* est égal à l'angle *C A O* que *A C* fait avec *A O* : & puisque les deux

puiſſances *P*, *Q* repréſentées par *AB*, *AC* ont avec leur réſultante repréſentée par *AO*, les mêmes rapports que les forces repréſentées par *AD*, *AI* ont avec la puiſſance *P* repréſentée par *AB*; on pourra regarder *AD*, *AI* comme deux forces dont la puiſſance *P* eſt compoſée, de la même façon que la réſultante *AO* eſt compoſée de deux puiſſances *P*, *Q*

2°. Par les mêmes raiſons, les puiſſances compoſantes *P*, *Q* repréſentées par *AB*, *AC* ſeront diſpoſées par rapport à leur réſultante *AO*, comme les deux forces repréſentées par *AL*, *AE* ſont diſpoſées par rapport à la puiſſance *Q* repréſentée par *AC*: & puiſque la réſultante *AO* eſt à chacune des deux forces *AB*, *AC* qui la compoſent, comme la puiſſance *Q* exprimée par *AC* eſt à chacune des deux forces *AL*, *AE*, on pourra regarder ces deux forces *AL*, *AE* comme deux compoſantes dont la puiſſance *Q* ou *AC* eſt la réſultante.

Donc au lieu des deux puiſſances *P*, *Q* ou *AB*, *AC* dont la réſultante inconnue *AO* eſt compoſée, on pourra prendre les quatre forces repréſentées par *AD*, *AI*, *AL*, *AE* qui juſqu'ici ſont inconnues, & qu'on va déduire des rapports ſuivans ſuppoſés par conſtruction

$$\left\{\begin{array}{l} AO : AB : AC :: AB : AD : AI \\ AO : AB : AC :: AC : AL : AE. \end{array}\right.$$

Mais de ces quatre forces *AD*, *AI*, *AL*, *AE*, les deux du milieu *AI*, *AL* ſe détruiſent; parce qu'elles ſont priſes en ſens contraires ſur la même droite *IL*, & qu'elles ſont égales, comme on va le démontrer.

$$\text{Car}\left\{\begin{array}{l} AO : AC :: AB : AI \\ AO : AB :: AC : AL \end{array}\right\}\text{ \& par conſéquent }\left\{\begin{array}{l} AI = \frac{AB \times AC}{AO} \\ AL = \frac{AB \times AC}{AO}. \end{array}\right.$$

Ainsi les deux forces AI, AL sont égales, puisqu'elles sont exprimées par la même fraction $\frac{AB \times AC}{AO}$.

Il ne reste donc, pour composer la résultante AO des deux puissances P, Q, que les deux forces représentées par AD & AE dont on va trouver les valeurs.

Puisque (*constr.*) $AO : AB : AC :: \left\{ \begin{matrix} AB : AD : AI \\ AC : AL : AE \end{matrix} \right\}$, on aura $\left\{ \begin{matrix} AO : AB :: AB : AD \\ AO : AC :: AC : AE \end{matrix} \right\}$. Ainsi $\left\{ \begin{matrix} \overline{AB}^2 = AO \times AD \\ \overline{AC}^2 = AO \times AE \end{matrix} \right\}$, & par conséquent

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = AO \times AD + AO \times AE = AO \times (AD + AE).$$

Mais les deux forces représentées par AD, AE agissant suivant la même direction que la résultante AO qu'elles doivent composer, leur somme $AD + AE$ sera nécessairement égale à AO (*ax.* 4). Ainsi l'on pourra mettre AO pour $AD + AE$ dans la dernière égalité; ce qui donnera $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = AO \times AO = \overline{AO}^2$.

Or AB, AC faisant ensemble un angle droit, si l'on tire la diagonale BC, on aura $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; & par conséquent $\overline{AO}^2 = \overline{BC}^2$ ou $AO = BC$: & comme les deux diagonales BC, AF du parallélogramme rectangle $ABFC$ sont égales, on aura $AO = AF$; c'est-à-dire que l'inconnue AO par laquelle on a représenté la résultante des deux puissances P, Q, tant pour sa grandeur que pour sa direction, est égale à la diagonale AF du parallélogramme rectangle dont les côtés contigus AB, AC représentent les puissances composantes P, Q. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

227. Lorſqu'une puiſſance quelconque *R* ſera repréſentée par une partie *AF* de ſa direction, l'on pourra donc prendre à ſa place deux autres puiſſances P, Q repréſentées, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions, par les côtés contigus *AB*, *AC* d'un parallélogramme rectangle dont *AF* ſera la diagonale. Fig. 161.

Car les deux puiſſances *P*, Q qui ſeront repréſentées par *AB*, *AC* compoſeront une réſultante *AF* qui ne différera en rien de la puiſſance *R* pour laquelle on les a priſes.

THÉOREME.

228. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *ſont repréſentées par les côtés contigus* AB, AC *d'un parallélogramme quelconque* ABFC *rectangle ou non rectangle, la réſultante de ces deux puiſſances eſt toûjours repréſentée, tant pour ſa direction que pour ſa grandeur, par la diagonale* AF *du même parallélogramme.* Fig. 162 & 163.

DÉMONSTRATION.

Par le point *A*, d'où partent les directions des deux puiſſances *P*, Q, ſoit menée la droite *IL* perpendiculaire à la diagonale *AF*; & par les points *B*, *C* où ſe terminent les côtés contigus du parallélogramme, ſoient tirées les droites *BI*, *CL* parallèlement à cette diagonale, & les droites *BD*, *CE* perpendiculairement à la même diagonale prolongée s'il eſt néceſſaire : les quadrilatères *ADBI*, *AECL* ſeront deux parallélogrammes rectangles dont les diagonales *AB*, *AC* repréſenteront les puiſſances *P*, Q.

Donc (*n°.* 227) à la place de la puissance *P* représentée par la diagonale *A B* du parallélogramme rectangle *A D B I*, on pourra prendre deux autres forces représentées par les côtés contigus *A D*, *A I* de ce rectangle ; & au lieu de la puissance *Q* exprimée par la diagonale *A C* du rectangle *A E C L*, on pourra prendre deux autres forces représentées par les côtés contigus *A E*, *A L* du même rectangle.

Par cette décomposition, au lieu des deux puissances *P*, *Q* représentées par les parties *A B*, *A C* de leurs directions, on aura quatre autres forces exprimées par *A D*, *A I*, *A E*, *A L*, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions.

Mais deux de ces quatre forces, savoir, celles qui sont représentées par *A I* & *A L*, se détruisent mutuellement ; car elles sont directement opposées, puisqu'elles ont leurs directions dans une même droite *I L* & qu'elles tirent le point *A* en sens contraire ; & elles sont égales, puisque les triangles rectangles *B D F*, *C E A* sont parfaitement égaux, ce qui est facile à reconnoître, & que leurs côtés *B D*, *C E* sont par conséquent égaux : d'où il suit que les droites *A I*, *A L* sont aussi égales.

Ainsi des quatre forces représentées par *A D*, *A I*, *A E*, *A L*, il ne reste que les deux forces représentées par *A D*, *A E* dont les directions sont dans la même droite *A F*.

Fig. 162. Dans la figure 162, les deux forces restantes *A D*, *A E* ayant la même direction, leur résultante est égale à leur somme $AD + AE$: & comme $AD + AE = AF$ à cause de l'égalité parfaite des deux triangles *B D F*, *C E A*, la même résultante est égale à $AD + DF$ ou à *A F*.

Donc

Donc la résultante des deux puissances P, Q, qui est la même que celle des deux forces restantes $A D$, $A E$, est représentée par la diagonale $A F$ du parallélogramme quelconque $A B F C$.

Dans la figure 163, les deux forces restantes $A D$, $A E$ ayant des directions opposées, leur résultante est égale à leur différence $A E - A D$: & comme $D F = A E$ à cause de l'égalité parfaite des deux triangles $B D F$, $C E A$, la résultante des deux puissances P, Q sera exprimée par $D F - A D$, c'est-à-dire par la diagonale $A F$ du parallélogramme $A B F C$. Fig. 163.

Donc en général lorsque deux puissances P, Q seront représentées par les côtés contigus d'un parallélogramme quelconque $A B F C$ rectangle ou non rectangle, leur résultante sera toujours représentée, tant pour sa direction que pour sa grandeur, par la diagonale $A F$ du même parallélogramme. C. Q. F. D. Fig. 162 & 163.

Corollaire I.

229. Lorsqu'on aura deux puissances P, Q représentées par les côtés contigus $A B$, $A C$ d'un parallélogramme $A B F C$ rectangle ou non rectangle, on pourra donc les supprimer, & prendre à leur place une seule force R représentée par la diagonale $A F$ du même parallélogramme, tant pour sa direction que pour sa grandeur. Car les deux puissances P, Q représentées par les côtés $A B$, $A C$, ne composeront ensemble qu'une résultante qui sera exprimée par la diagonale $A F$ du parallélogramme $A B F C$, & qui par conséquent ne différera en rien de la force R qu'on prendra à leur place. Fig. 162 & 163.

Comme un parallélogramme $A B F C$ n'a qu'une

seule diagonale qui parte du sommet de l'angle *A* où concourent les directions des deux puissances *P*, Q, il est évident qu'il n'y a qu'une seule force résultante qui puisse être prise à la place des deux puissances *P*, Q.

Corollaire II.

Fig. 164. 230. Et réciproquement si l'on a une puissance *R* qui soit représentée, tant pour sa grandeur que pour sa direction, par la diagonale *A D* d'un parallélogramme quelconque *A B F C*; on pourra supprimer cette puissance *R*, & prendre à sa place deux autres puissances *P*, Q représentées par les côtés contigus *A B*, *A C* de ce parallélogramme.

Mais une même droite *A F* pouvant servir de diagonale à une infinité de parallélogrammes différens *A L F K*, *A I F M*, *A B F C*, &c. & les côtés contigus à l'angle *A* de chacun de ces parallélogrammes pouvant être pris à la place de la puissance *R*; il est clair que pour une même puissance *R* représentée par une droite *A F*, on peut prendre deux à deux une infinité de différentes puissances qui seront représentées par les côtés contigus d'une infinité de parallélogrammes différens.

Car les deux puissances que l'on prendra, & qui seront représentées par les côtés contigus *A B*, *A C*, ou *A L*, *A K*, ou *A I*, *A M*, &c. d'un parallélogramme dont *A F* sera la diagonale, ne produiront qu'une seule & même force résultante qui sera représentée par la diagonale *A F*, & qui ne différera par conséquent en rien de la puissance *R* qu'on suppose représentée par la même diagonale *A F*.

COROLLAIRE III.

231. Si l'on fait attention à la démonstration du Théorème, non-seulement on y reconnoîtra que les forces composantes *P*, *Q* exprimées tant pour leurs valeurs que pour leurs directions par les côtés contigus *AB*, *AC* du parallélogramme *ABFC*, se réduisent à une séule force résultante *R* représentée tant pour sa valeur que pour sa direction par la diagonale *AF* du même parallélogramme; mais on y verra encore pour combien de force & de quelle manière chacune des deux puissances *P*, *Q* contribue à la composition de la force résultante *R*. Fig. 162 & 163.

Car on y démontre que si des extrémités *B*, *C* des côtés *AB*, *AC* par lesquels les puissances *P*, *Q* sont représentées, l'on mène des perpendiculaires *BD*, *CE* à la diagonale *AF* prolongée s'il est nécessaire, les parties *AD*, *AE* de cette diagonale, comprises entre ces perpendiculaires & le point *A* où concourent les directions des deux puissances *P*, *Q*, représenteront les quantités de force pour lesquelles les puissances *P*, *Q* contribueront à la composition de la force résultante *R*.

On y démontre encore que si les perpendiculaires *BD*, *CE* sont au dedans du parallélogramme *ABFC*, les forces *AD*, *AE* pour lesquelles les puissances *P*, *Q* contribuent à la composition de la force résultante *R*, doivent être ajoûtées ensemble pour faire une somme égale à cette résultante. Au contraire si les perpendiculaires *BD*, *CE* tombent au dehors du parallélogramme *ABFC*, & ne rencontrent que les prolongemens *AD*, *FE* de sa diagonale, les forces *AD*, *AE* pour lesquelles les puissances *P*, *Q* contribueront à la Fig. 162.

composition de la force résultante *R*, seront opposées; & il faudra soustraire la plus petite de la plus grande, pour avoir la force résultante *R* qui aura la direction de la plus grande *AD* des deux forces opposées.

COROLLAIRE IV.

Fig. 165 & 166. 232. Si l'on fait un triangle *GHI* dont les côtés *GH*, *HI*, *GI* soient parallèles aux directions des puissances *P*, *Q* & de leur résultante *R*; ces puissances *P*, *Q* & leur résultante *R* seront proportionnelles aux côtés *GH*, *HI*, *GI* du triangle *GHI*, & chacune de ces trois forces sera correspondante au côté parallèle à sa direction; c'est-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: GH : HI : GI$.

Car les deux puissances *P*, *Q* étant représentées par *AB*, *AC*, & le parallélogramme *ABFC* étant construit pour avoir sa diagonale *AF* qui doit représenter la force résultante *R*, on aura $P : Q : R :: AB : AC : AF$ ou $:: AB : BF : AF$; parce que $AC = BF$.

Mais les deux triangles *ABF*, *GHI* ayant les côtés parallèles chacun à chacun, seront semblables & donneront $AB : BF : AF :: GH : HI : GI$.

On aura donc $P : Q : R :: GH : HI : GI$.

COROLLAIRE V.

Fig. 165 & 167. 233. Si l'on fait un triangle *MNO* dont les côtés *MN*, *NO*, *MO* soient perpendiculaires sur les directions des puissances *P*, *Q* & de leur résultante *R*; ces puissances *P*, *Q* & leur résultante *R* seront proportionnelles aux côtés du triangle *MNO*, & chacune de ces trois forces sera correspondante au côté perpendiculaire à sa direction; c'est-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: MN : NO : MO$.

Car les puissances *P*, *Q* étant représentées par les parties *AB*, *AC* de leurs directions, & le parallélogramme *ABFC* étant construit pour avoir sa diagonale *AF* qui doit représenter la force résultante *R*, on aura, comme dans le Corollaire précédent, *P* : *Q* : *R* :: *AB* : *BF* : *AF*.

Mais les deux triangles *ABF*, *MNO* ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, seront semblables & donneront *AB* : *BF* : *AF* :: *MN* : *NO* : *MO*. On aura donc *P* : *Q* : *R* :: *MN* : *NO* : *MO*.

THÉOREME.

234. *Si par le point* A, *où concourent les directions de deux puissances* P, Q *& celle de leur force résultante* R, *on décrit une circonférence de cercle* AMGN *qui rencontre les directions de ces puissances en* M, N, *& celle de leur résultante en* G, *& qu'on joigne ces trois points par les trois cordes* GM, GN, MN; *la valeur de chacune de ces trois forces, & non sa direction, sera représentée par la corde qui se terminera aux directions des deux autres forces; c'est-à-dire que l'on aura* P : Q : R :: GN : GM : MN. Fig. 168, 169, 170, 171, 172 & 173.

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque *F* de la direction de la résultante *R* soient menées deux droites *FC*, *FB* parallèlement aux directions des deux puissances composantes *P*, *Q* : les triangles *ACF*, *MGN* seront semblables. Car les deux angles *CAF*, *GMN* ayant leurs sommets à la circonférence, & étant appuyés sur le même arc *GN*, seront égaux (*Géom. n°.* 88); & l'angle *AFC* ou son égal *BAF* sera de même grandeur que l'angle *GNM*, puisque (*fig.* 168, 169

& 172) ils auront tous deux pour mesure la moitié du même arc *G M*, & que (*fig.* 170, 171 & 173) ils auront pour mesure la moitié de la somme des deux arcs *A G*, *A M*.

Or les triangles semblables *A C F*, *M G N* donneront *C F* : *C A* : *A F* :: *G N* : *G M* : *M N*; & l'on aura (*n*°. 228) P : Q : R :: *AB* : *AC* : *AF* ou :: *C F* : *C A* : *A F*.

On aura donc *P* : Q : *R* :: *G N* : *G M* : *M N*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 168, 169, 170, 171, 172 & 173.

235. Puisque (*n*°. 234) *P* : *Q* : R :: *G N* : *G M* : *M N*,

on aura $\begin{cases} P : Q :: GN : GM \\ Q : R :: GM : MN \\ P : R :: GN : MN. \end{cases}$

Or 1°. les cordes *G M*, *G N* qui partent d'un même point *G* de la direction de la résultante *R* des deux puissances *P*, Q, comprennent des angles égaux *G M S*, *G N A* avec les directions de ces deux puissances : car ces angles, qui ont leurs sommets à la circonférence, ont tous deux pour mesure la moitié de la somme des deux arcs *A M*, *M G* (*fig.* 168, 169 & 172), & la moitié de l'arc *A Z G* (*fig.* 170, 171 & 173). Ainsi puisqu'on a trouvé *P* : Q :: *G N* : *G M*, on doit conclurre que si d'un point quelconque G de la direction de la résultante des deux puissances *P*, Q, l'on mène vers les directions de ces puissances deux droites *G M*, *G N* qui fassent avec ces directions deux angles égaux *G M S*, *G N A* les deux puissances *P*, Q seront en raison réciproque de ces deux droites *G M*, *G N*.

2°. Les cordes *MN*, *MG* menées d'un même point *M* de la direction de la puissance *P*, & terminées par les directions de la puissance Q & de la résultante *R*, font des angles égaux *MNA*, *MGA* avec ces deux dernieres directions : car ces angles ont tous deux le sommet à la circonférence du même cercle & sont appuyés sur le même arc *AM*. Ainsi puisque Q : *R* :: *MG* : *MN*, on conclurra que la puissance Q & la résultante *R* des deux puissances *P*, Q sont réciproquement proportionnelles aux deux droites *MN*, *MG* qui font des angles égaux avec leurs directions, & qui sont tirées d'un même point *M* de la direction de la puissance *P*.

3°. Les deux cordes *NM*, *NG* tirées d'un même point *N* de la direction de la puissance Q, & terminées par les directions de la puissances *P* & de la résultante *R*, font avec ces deux dernières directions (*fig.* 168, 169 & 172) des angles *NMA*, *NGA* qui sont égaux, puisqu'ils sont à la circonférence d'un même cercle & qu'ils comprennent un même arc *AN*; & (*fig.* 170, 171 & 173) les mêmes droites *NM*, *NG* font avec les directions *AP*, *AR* des angles *NMA*, *NGR* qui sont égaux, puisque chacun d'eux a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs *AZG*, *GN*. Ainsi puisque *P* : *R* :: *NG* : *NM*, on doit conclurre que la puissance *P* & la résultante *R* des deux puissances *P*, Q sont réciproquement proportionnelles aux deux droites *NM*, *NG* qui font des angles égaux avec leurs directions, & qui partent d'un même point *N* de la direction de la puissance Q.

COROLLAIRE II.

Fig. 169. 236. 1°. Si la partie AG de la direction de la résultante R est le diamètre de la circonférence décrite par le point A, les deux angles GMA, GNA seront droits, & les deux cordes GM, GN seront par conséquent perpendiculaires sur les directions des deux puissances P, Q. Ainsi puisque $P : Q :: GN : GM$, on conclurra que deux puissances P, Q sont en raison réciproque des perpendiculaires menées d'un même point G de la direction de leur résultante, sur leurs directions.

Fig. 170. 2°. Si le diamètre AM de la circonférence qu'on a décrite par le point A, est dans la direction de la puissance P, les deux angles MNA, MGA seront droits, & les deux cordes MN, MG seront par conséquent perpendiculaires, l'une sur la direction de la puissance Q, l'autre sur celle de la résultante R des deux puissances P, Q. Ainsi puisqu'on a trouvé $Q : R :: MG : MN$, on conclurra que la puissance Q & la résultante R des deux puissances P, Q sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires MN, MG tirées d'un même point M de la direction de la puissance P sur leurs directions AQ, AR.

Fig. 171. 3°. Si le diamètre de la circonférence décrite par le point A est une partie AN de la direction de la puissance Q, les deux cordes NM, NG seront perpendiculaires, l'une sur la direction de la puissance P, l'autre sur la direction de la résultante R des deux puissances P, Q. Ainsi puisque $P : R :: NG : NM$, la puissance P & la résultante R des deux puissances P, Q sont réciproquement proportionnelles aux

perpendiculaires *NM*, *NG* tirées d'un même point *N* de la direction de la puissance Q sur leurs directions *AP*, *AR*.

THÉOREME.

237. *Si l'on tire deux droites* MNO, mno *parallèles entr'elles, qui rencontrent les directions de deux puissances* P, Q, *& celle de leur résultante* R, *l'une en trois points* M, N, O, *l'autre en trois autres points* m, n, o; *on aura* P : Q : R :: Mm × NO : Nn × MO : Oo × MN. *C'est-à-dire que la valeur de chacune des trois forces* P, Q, R *sera représentée par la portion de sa propre direction, comprise entre les deux parallèles, multipliée par la portion de la droite* MNO, *comprise entre les directions des deux autres forces.* Fig. 169, 170, 172 & 173.

DÉMONSTRATION.

Si par un point quelconque *F* de la direction de la résultante *R* des deux puissances *P*, Q, l'on mène des parallèles *FC*, *FB* aux directions de ces deux puissances; on aura un parallélogramme *ABFC* dont les côtés contigus *AB*, *AC* & la diagonale *AF* pourront représenter les trois forces *P*, Q, *R*: ainsi l'on aura *P* : Q : *R* :: *AB* : *AC* : *AF*.

Par un angle *C* du parallélogramme *ABFC*, soit menée la droite *LIC* parallèlement à *MNO*; ces deux parallèles seront coupées en parties proportionnelles par les directions des trois forces *P*, Q, *R*; c'est-à-dire que l'on aura *LI* : *CI* :: *MO* : *NO*; & comme les triangles semblables *AIL*, *FIC*

donneront $\left\{\begin{matrix} AI : FI \\ AL : FC = AB \end{matrix}\right\} :: LI : CI$, on aura aussi $\left\{\begin{matrix} AI : FI \\ AL : AB \end{matrix}\right\} :: MO : NO$.

Or 1°. de la proportion $AI : FI :: MO : NO$ on conclurra *componendo* pour les figures 169 & 172, & *detrahendo* pour les figures 170 & 173,

$$\left.\begin{matrix} AI : AI + FI :: MO : MO + NO \\ AI : AI - FI :: MO : MO - NO \end{matrix}\right\} \text{ ou } AI : AF :: MO : MN.$$

Mais à cause des parallèles LIC, MNO, mno, on aura (*Géom.* n°. 247) $AC : AI :: Nn : Oo$.

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $AC : AF :: Nn \times MO : Oo \times MN$.

2°. Puisque $AL : AB :: MO : NO$, ou $AB : AL :: NO : MO$, & que les trois parallèles LIC, MNO, mno donneront $\}$ $AL : AC :: Mm : Nn$; Si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, on aura $AB : AC :: Mm \times NO : Nn \times MO$. Or on a trouvé $AC : AF :: Nn \times MO : Oo \times MN$. Ainsi $AB : AC : AF :: Mm \times NO : Nn \times MO : Oo \times MN$. Mais $P : Q : R :: AB : AC : AF$. Donc on aura enfin

$$P : Q : R :: Mm \times NO : Nn \times MO : Oo \times MN.$$

C. Q. F. D.

On doit remarquer que si l'une m n o *des parallèles avoit été menée par le point de concours* A *des deux puissances, les trois points* m, n, o *se seroient confondus avec le point* A, *&* qu'on *auroit par conséquent*

$$P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN.$$

COROLLAIRE I.

238. Lorsque les directions des deux puissances P, Q, & par conséquent celle de leur résultante R, seront parallèles, leurs parties Mm, Nn, Oo comprises entre les parallèles MNO, mno, seront aussi égales ; ainsi l'on aura $Mm \times NO : Nn \times MO : Oo \times MN :: NO : MO : MN$. & comme on vient de démontrer (n°. 237) que $P : Q : R :: Mm \times NO : Nn \times MO : Oo \times MN$, on aura $P : Q : R :: NO : MO : MN$; c'est-à-dire que si l'on coupe les directions parallèles de deux puissances P, Q & celle de leur résultante R par une droite MNO, la quantité de chacune de ces trois forces sera représentée par la partie de cette droite MNO, qui se trouvera comprise entre les directions des deux autres. Fig. 168, 170, 172 & 173.

COROLLAIRE II.

239. Mais lorsque les directions des deux puissances P, Q & de leur résultante R sont parallèles, la ligne MN, par laquelle la valeur de la résultante R est représentée, est égale à la somme ou à la différence des deux lignes NO, MO qui représentent les deux puissances P, Q, suivant que ces deux puissances tirent ou ne tirent pas d'un même côté. Fig. 175 & 176.

Ainsi la résultante de deux puissances P, Q, dont les directions sont parallèles, est égale à la somme ou à la différence de ces puissances, suivant qu'elles tirent ou ne tirent pas d'un même côté; c'est-à-dire que (*fig.* 175) la résultante $R = P + Q$, & (*fig.* 176) la résultante $R = P - Q$.

THÉOREME.

Fig. 164. **240.** *Les deux puissances* P, Q *& leur résultante* R *sont trois forces dont chacune peut être représentée par le sinus de l'angle que les directions des deux autres font entr'elles ; c'est-à-dire que si l'on prend* S *pour la caractéristique des sinus, on aura*

P : Q : R :: S. CAF : S. BAF : S. BAC

Démonstration.

Par un point quelconque *F* de la direction de la résultante *R*, soient menées des parallèles *FC*, *FB* aux directions des deux puissances *P*, Q : le quadrilatère *ABFC* sera un parallélogramme dont les côtés *AB*, *AC* & la diagonale *AF* représenteront les deux puissances *P*, Q & la résultante *R*. Ainsi l'on aura *P* : Q : *R* :: *AB* : *AC* : *AF*, ou :: *AB* : *BF* : *AF* parce que *BF* = *AC*.

Mais (*Géom. n°.* 576) les côtés d'un triangle étant proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés, on aura *AB* : *BF* : *AF* :: S. *AFB* : S. *BAF* : S. *ABF*, ou :: S. *CAF* : S. *BAF* : S. *BAC*, parce que l'angle *AFB* est égal à son alterne *CAF*, & que les deux angles *ABF*, *BAC*, qui valent ensemble deux droits, ont le même sinus.

On aura donc *P* : Q : *R* :: S. *CAF* : S. *BAF* : S. *BAC*. C. Q. F. D.

Corollaire.

Fig. 165. **241.** Si l'on prolonge la direction de la résultante *R* au-delà du point *A* vers *D*, le prolongement de la direction de la puissance *P* passera dans l'angle Q*AD* formé par la direction de la puissance

Q & par le prolongement de la direction de la résultante R; & le prolongement de la direction de la puissance Q passera dans l'angle PAD formé par la direction de la puissance P & par le prolongement de la direction de la résultante R. De plus on aura $S.CAF = S.QAD$, & $S.BAF = S.PAD$.

Ainsi puisque $P:Q:R :: S.CAF : S.BAF : S.BAC$; on aura aussi $P:Q:R :: S.QAD : S.PAD : S.BAC$; c'est-à-dire que les deux puissances P, Q & leur résultante R sont proportionnelles aux sinus des angles au travers desquels passent leurs directions.

SCHOLIE.

Lorsque l'on connoîtra les valeurs de deux puissances P, Q & leurs directions situées dans un même plan, les quatre derniers Théorèmes & leurs Corollaires donneront différens moyens pour trouver la valeur & la direction de la force résultante R de ces deux puissances.

I.

242. Si l'on peut avoir le point A où concourent les directions des deux puissances P, Q, on prendra sur leurs directions, à commencer de ce point A, deux parties AB, AC, pour représenter ces puissances; c'est-à-dire qu'on fera $AB : AC :: P : Q$. Puis ayant fait un parallélogramme $ABFC$ qui ait pour côtés contigus les deux parties AB, AC, on mènera la diagonale AF qui représentera la valeur & la direction de la force résultante R des deux puissances P, Q. Fig. 165.

Cette pratique est contenue mot à mot dans la démonstration du Théorème cotté 228.

Fig. 165. **243.** Comme les deux diagonales *AF*, *BC* d'un parallélogramme *ABFC* se coupent mutuellement en deux parties égales; après avoir pris sur les directions des deux puissances *P*, *Q*, à commencer de leur point de concours *A*, deux parties *AB*, *AC* pour représenter ces puissances, on auroit pû se dispenser d'achever le parallélogramme *ABFC*. Car en tirant la droite *BC*, & menant du point *A* par son milieu *E* une droite *AF* double de *AE*, cette droite *AF* seroit la diagonale d'un parallélogramme *ABFC*, & représenteroit par conséquent la valeur & la direction de la résultante *R* des deux puissances *P*, *Q*.

Fig. 165 & 166. **244.** On peut aussi trouver la valeur & la direction de la résultante *R* des deux puissances *P*, *Q* en menant par un point quelconque *H* deux droites *HG*, *HI*, parallèles aux directions de ces puissances & proportionnelles à leurs quantités de force. Car si l'on tire la droite *GI*, & que par le point de concours *A* des directions des deux puissances *P*, *Q*, l'on mène la droite *AR* parallèlement à *GI*, cette droite *AR* sera la direction de la résultante des deux puissances *P*, *Q*, & la droite *GI* représentera la quantité de force de cette résultante, pendant que les deux droites *HG*, *HI* représenteront les quantités de force des deux puissances *P*, *Q*.

Car si l'on prend sur la droite *AR* une partie *AF* = *GI*, & qu'on mène deux droites *FC*, *FB* parallèles aux directions des deux puissances *P*, *Q*: les deux triangles *ABF*, *GHI* seront semblables & égaux, puisqu'ils auront les côtés parallèles chacun à chacun, & les côtés *AF*, *GI* égaux par conſ-

truction : & comme les quantités de force des deux puissances P, Q sont supposées représentées par les deux droites *HG*, *HI*, elles seront aussi représentées par *AB*, *BF* ou par les deux parties *AB*, *AC* de leurs directions, c'est-à-dire par les côtés contigus du parallélogramme *ABFC*. Ainsi (*n°*.228) la résultante des deux puissances *P*, Q sera représentée par la diagonale *AF* du même parallélogramme *ABFC*, tant pour sa direction que pour sa quantité de force. Donc la droite *AR* qu'on a menée parallèlement à G*I* est la direction de la force résultante des deux puissances *P*, Q, & la droite G*I* = *AF* représente la quantité de force de cette résultante, pendant que les deux droites G*H*, *HI* représentent les valeurs des deux puissances *P*, Q.

Comme la résultante R *des deux puissances* P, Q *doit passer dans l'angle* PAQ *compris entre les directions de ces deux puissances, lorsqu'on mènera par le point quelconque* H *deux droites* HG, HI *proportionnelles aux deux puissances* P, Q *& parallèles à leurs directions, on doit avoir attention que ces deux lignes fassent entr'elles un angle* GHI *égal au supplément de l'angle* PAQ *que les puissances* P, Q *comprennent entre leurs directions. Car si l'on tiroit parallèlement à la direction de la puissance* Q *une droite* HL *qui fît avec* GH *un angle* GHL *égal à l'angle* PAQ, *& si l'on menoit la droite* GL; *la ligne qu'on mèneroit par le point* A *parallèlement à* GL *ne passeroit pas dans l'angle* PAQ, *& ne pourroit par conséquent pas être la direction de la résultante des deux puissances* P, Q.

245. On peut encore trouver la valeur & la direction de la résultante *R* des deux puissances *P*, Q, en menant par un point quelconque *N* deux droites Fig. 165 & 167.

NM, *NO* perpendiculaires aux directions *AP*, *AQ* de ces deux puissances & proportionnelles à leurs quantités de force. Car si l'on tire la droite *OM*, & que par le point de concours *A* des directions des deux puissances *P*, Q, l'on mène la droite *AR* perpendiculairement à *OM*, cette droite *AR* sera la direction de la résultante des deux puissances *P*, Q; & la droite *OM* représentera la quantité de force de cette résultante, pendant que les deux droites *NM*, *NO* représenteront les valeurs des deux puissances *P*, Q.

Pour le démontrer, soit prise sur la droite *AR* une partie *AF* = *OM*, & soient tirées par le point *F* deux parallèles *FC*, *FB* aux directions des puissances *P*, Q: le quadrilatère *ABFC* sera un parallélogramme, & les deux triangles *ABF*, *MNO* seront semblables & égaux, puisqu'ils auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun, & les côtés *AF*, *MO* égaux par construction. Or les quantités de force des deux puissances *P*, Q étant supposées proportionnelles aux deux lignes *MN*, *NO*, seront aussi proportionnelles aux deux lignes *AB*, *BF*, ou aux deux parties *AB*, *AC* des directions des deux puissances *P*, Q. Ainsi (*n°*. 228) la résultante des deux puissances *P*, Q sera représentée, tant pour sa direction que pour sa quantité de force, par la diagonale *AF* du parallélogramme *ABFC*; c'est-à-dire que la résultante des deux puissances *P*, Q sera dirigée suivant la droite *AR* qu'on a menée par le point *A* perpendiculairement sur *MO*, & que la droite *MO*, qui par construction est égale à *AF*, représentera la quantité de force de cette résultante, pendant que les deux droites *MN*, *NO* représenteront les quantités de force des deux puissances *P*, Q.

Si

Si l'on remarque, comme on a fait dans le numéro précédent, que la résultante R *des deux puissances* P, Q *doit nécessairement passer dans l'angle* P A Q *compris entre les directions de ces puissances, on reconnoîtra que les droites* N M, N O, *menées par le point quelconque* N *perpendiculairement aux directions des deux puissances* P, Q, *doivent faire un angle* M N O *égal au supplément de l'angle* P A Q *compris entre ces directions. Car si l'on menoit* N L *dans la direction de* O N *ou perpendiculairement sur* A Q, *de manière que l'angle* M N L *fût égal à l'angle* P A Q, *& si l'on tiroit* M L; *la droite qu'on mèneroit par le point* A *perpendiculairement sur* M L *ne passeroit pas dans l'angle* P A Q, *& ne pourroit par conséquent pas être la direction de la résultante des deux puissances* P, Q.

246. Enfin si l'on connoît les quantités de force des deux puissances *P*, *Q* & l'angle *B A C* que leurs directions font entr'elles, on pourra déterminer par la Trigonométrie la direction & la valeur de leur force résultante *R*. Car ayant imaginé un parallélogramme *A B F C* dont les côtés contigus *A B*, *A C* soient pris sur les directions des puissances *P*, *Q*, & soient proportionnels à ces puissances, en sorte que sa diagonale *A F* représente la force résultante *R* des mêmes puissances; on connoîtra les deux côtés *A B*, *B F* & l'angle *A B F* du triangle *A B F*. Ainsi (*Géom. n°.* 588) on trouvera les deux angles *B A F*, *B F A*, ou *B A F*, *C A F* que les directions des deux puissances *P*, *Q* font avec la direction de leur résultante *R*; & l'on trouvera aussi la valeur de la droite *A F* qui représente cette résultante. Fig. 171.

I I.

247. Si le point *A* où concourent les directions Fig. 171.

des deux puissances *P*, *Q* est trop éloigné pour servir d'origine aux proportionnelles de ces puissances, & pour aider à diriger leur résultante *R*, on mènera par un point quelconque *B* de la direction de l'une *P* de ces puissances une droite indéfinie *B F* parallèle à la direction de l'autre puissance *Q*; puis ayant pris sur *B A*, *B F* des parties *B a*, *B f* proportionnelles aux deux puissances *P*, *Q*, on mènera la droite *af*, & l'on aura un triangle *a B f* dont les côtés *a B*, *B f*, *af* représenteront les quantités de force des deux puissances *P*, *Q* & celle de leur résultante *R* dont la direction sera parallèle à *a f* (*n*°. 244).

Pour trouver la vraie direction de la résultante *R*, on tirera par le point *B* & par le milieu de la droite *a f* une droite *B e C* qui rencontrera la direction de la puissance *Q* en quelque point *C*; & par le milieu *E* de la droite *B C*, on mènera parallèlement à *a f* une droite *E R* qui sera la direction de la résultante *R*.

Pour le démontrer on achèvera le parallélogramme *a B f c*, & l'on imaginera par le point *C* une droite *C F* parallèle à *A P*, qui rencontrera le prolongement de la droite *B f* en quelque point *F*; c'est-à-dire qu'on imaginera un parallélogramme *A B F C* semblable au parallélogramme *a B f c*, & dont les côtés *A B*, *B F* ou *A B*, *A C* seront proportionnels aux côtés *a B*, *B f*: & comme les deux lignes *a B*, *B f* sont, par construction, proportionnelles aux deux puissances *P*, *Q*, la résultante de ces deux puissances sera dirigée suivant la diagonale *A F*. Mais la diagonale *A F* du parallélogramme *A B F C* coupe nécessairement l'autre diagonale *B C* en deux parties égales, & est parallèle à la diagonale *a f* du parallélogramme semblable

a B f c. Ainsi la force résultante des deux puissances *P*, Q doit être dirigée suivant une droite *E R* menée par le milieu *E* de *B C* parallèlement à la droite *a f*.

III.

248. Lorsque les directions des deux puissances *P*, Q seront parallèles, on mènera par deux points quelconques de ces directions une droite *MN* dans laquelle ou dans le prolongement de laquelle on déterminera un point *O* tel que l'on ait *R* : *P* :: *MN* : *NO*; puis on mènera par le point *O* parallèlement aux directions des deux puissances *P*, Q une droite *O R* qui sera (*n*°. 238) la direction de la résultante des deux puissances *P*, Q. Fig. 175 & 176.

On remarquera que le point *O* doit être pris entre les directions des deux puissances *P*, *Q*, & que la résultante est égale à leur somme lorsque ces deux puissances tirent d'un même côté; au lieu que le point *O* doit être pris dans le prolongement de la ligne *M N* du côté de la plus grande des deux puissances, & que la résultante est égale à leur différence lorsque ces puissances ne tirent pas d'un même côté. Fig. 175. Fig. 176.

PROBLEME.

249. *Trouver la résultante de tant de puissances* P, Q, R, S *qu'on voudra, qui tirent ou poussent toutes le même point* A *avec des quantités de force connues, suivant des directions données quelconques, situées ou non situées dans un même plan.* Fig. 177.

SOLUTION.

On prendra sur les directions *A P*, *A Q*, *A R*, *A S* de ces puissances, à commencer du point *A* d'où el-

les partent toutes, des parties *AB*, *AC*, *AD*, *AE* proportionnelles aux quantités de force qu'elles exercent; en ſorte que ces puiſſances ſoient repréſentées, tant pour leur force que pour leurs directions, par leurs proportionnelles *AB*. *AC*. *AD*. *AE*. Cela poſé,

1°. On fera un parallélogramme *ABFC* qui ait pour côtés contigus les deux droites *AB*, *AC* par leſquelles deux quelconques *P*, *Q* des puiſſances données ſont repréſentées, & l'on tirera la diagonale *AF* qui (*n°*. 228) repréſentera la force réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*; en ſorte qu'on pourra ſupprimer ces deux puiſſances, & prendre à leur place une force repréſentée par *AF*, tant pour ſa valeur que pour ſa direction. Alors le Problème ſe réduira à trouver la réſultante des puiſſances repréſentées par *AF*, *AD*, *AE*.

2°. On fera un ſecond parallélogramme *AFGD* qui ait pour côtés contigus la diagonale *AF* du premier parallélogramme, & la droite *AD* par laquelle on a repréſenté une troiſième puiſſance *R*; puis on tirera la diagonale *AG* qui (*n°*. 228) repréſentera la réſultante des deux forces exprimées par *AF*. *AD*: & comme la force exprimée par *AF* eſt la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*, la force repréſentée par *AG* ſera la réſultante des trois puiſſances *P*, *Q*, *R* exprimées par *AB*, *AC*, *AD*. On pourra donc ſupprimer les trois puiſſances *P*, *Q*, *R*, & prendre à leur place la ſeule force repréſentée par *AG*; ce qui réduira le Problème à trouver la réſultante des deux forces repréſentées par *AG*, *AE*.

3°. On fera un troiſième parallélogramme *AGHE* qui ait pour côtés contigus la diagonale *AG* du der-

nier parallélogramme, par laquelle la résultante des trois puissances *P*, *Q*, *R* est représentée, & la droite *AE* par laquelle la puissance *S* est exprimée; puis on mènera la diagonale *AH* qui représentera la quantité de force & la direction de la résultante des deux forces *AG*, *AE* ou des quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* données de grandeur & de direction. C. Q. F. T.

Si l'on avoit un plus grand nombre de puissances, on feroit un nouveau parallélogramme qui auroit pour côtés contigus la diagonale du dernier parallélogramme & une droite représentant une nouvelle puissance; puis on en tireroit la diagonale qui représenteroit une nouvelle résultante. Enfin l'on répéteroit la même opération jusqu'à ce que toutes les puissances fussent réduites à une seule force résultante.

Il suit de la solution de ce Problème qu'il faut faire autant de parallélogrammes moins un, qu'il y a de puissances à réduire à une seule force résultante.

Corollaire.

250. Comme les deux diagonales *AF*, *BC* du premier parallélogramme *ABFC* se coupent mutuellement en deux parties égales, il est évident que pour avoir l'expression *AF* de la résultante des deux puissances *P*, *Q*, il suffit de joindre les extrémités de leurs proportionnelles *AB*, *AC* par une droite *BC*, & de tirer du point *A* par le milieu *I* de cette ligne une droite *AIF* double de *AI*; car cette droite *AIF* sera la diagonale du parallélogramme *ABFC*, & représentera par conséquent la résultante des deux puissances *P*, *Q*. Fig. 178.

Si par le point *I* & par l'extrémité *D* de la ligne *AD* qui représente la troisième puissance *R*, on

mène la droite ID; cette ligne coupera la diagonale AG du second parallélogramme $AFGD$ en quelque point K, de manière que l'on aura $IK = \frac{1}{3} ID$ & $AK = \frac{1}{3} AG$.

Car les côtés opposés AF, DG du second parallélogramme étant parallèles, les triangles AKI, GKD seront semblables, & l'on aura ces proportionnelles $AI : IK : AK :: GD : DK : GK$.

Mais AI est la moitié de AF, & est par conséquent égal à la moitié de DG. Donc les deux lignes IK, AK sont aussi égales aux moitiés des lignes correspondantes DK, GK, & sont par conséquent égales aux tiers des lignes entières ID, AG.

Fig. 179. On pourra donc, sans faire aucun parallélogramme, trouver l'expression de la résultante de trois puissances P, Q, R données de grandeur & de direction.

Car si du milieu I de la droite BC tirée par les extrémités des proportionnelles aux deux premières puissances P, Q, l'on mène une droite ID à l'extrémité de la droite qui représente la troisième puissance; & qu'après avoir fait $IK = \frac{1}{3} ID$, l'on tire la droite AK, & qu'on la prolonge de manière qu'on ait $AG = 3\ AK$; cette droite AG sera la diagonale du second parallélogramme $AFGD$ de la figure 178, & représentera par conséquent la direction & la quantité de force de la résultante des trois puissances P, Q, R.

Fig. 178. Si par le point K & par l'extrémité E de la droite AE qui représente la quatrième puissance, on mène une droite KE, elle coupera la diagonale AH du troisième parallélogramme en quelque point L, de manière qu'on aura $KL = \frac{1}{4} KE$ & $AL = \frac{1}{4} AH$.

Car les côtés opposés AG, EH du parallélogramme $AGHE$ étant parallèles, les triangles ALK, HLE seront semblables, & l'on aura ces proportionnelles $AK : KL : AL :: HE : EL : HL$.

Mais on vient de voir que $AK = \frac{1}{3} AG$; & puisque $AG = HE$, on aura aussi $AK = \frac{1}{3} HE$: d'où il suit que les deux lignes KL, AL seront égales aux tiers des lignes correspondantes EL, HL, & seront par conséquent égales aux quarts des lignes entières KE, AH.

On pourra donc, sans faire aucun parallélogrammes, trouver la force résultante AH de quatre puissances P, Q, R, S. Car si du milieu I de la droite BC qui joint les extrémités des proportionnelles des deux premières puissances, l'on mène une droite ID à l'extrémité de la proportionnelle de la troisième puissance, & qu'ayant fait $IK = \frac{1}{3} ID$ l'on tire une droite KE du point K à l'extrémité de la droite AE par laquelle la quatrième puissance est représentée; enfin si l'on prend sur cette droite KE une partie $KL = \frac{1}{4} KE$, & que l'on tire du point A par le point L une droite $AH = 4AL$, cette droite AH sera la diagonale du troisième parallélogramme $AGHE$ de la figure 178; ainsi elle représentera la direction & la quantité de force de la résultante des quatre puissances P, Q, R, S. Fig. 179.

Si l'on avoit une cinquième puissance, on mèneroit une ligne droite du point L à l'extrémité de la ligne qui représenteroit cette cinquième puissance; & après avoir pris la cinquième partie de cette droite à commencer du point L, on mèneroit du point A à l'extrémité de cette partie une ligne droite qui seroit la direction de la résultante des cinq puissances don-

nées; & quintuplant cette ligne, on auroit la proportionnelle de cette résultante.

DÉFINITIONS.

Fig. 178. 251. Le point *A*, où concourent les directions de plusieurs puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, &c. s'appelle le *Centre des forces* de ces puissances.

Les points *I*, *K*, *L* qu'on vient de déterminer (*n*°. 250), & par lesquels passent les forces résultantes de ces puissances, se nomment *Centres principaux d'équilibre*; c'est-à-dire que le point *I* est le centre principal d'équilibre des deux puissances *P*, *Q*; le point *K* est le centre principal d'équilibre des trois puissances *P*, *Q*, *R*; & le point *L* est le centre principal d'équilibre des quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, &c.

COROLLAIRE.

Fig. 179. 252. Si l'on fait attention aux positions des centres principaux d'équilibre *I*, *K*, *L*, &c. on remarquera aisément que chaque résultante est à la distance qu'il y a entre le centre *A* des forces & le centre d'équilibre par lequel elle passe, comme le nombre des forces dont elle est la résultante, est à l'unité; c'est-à-dire que

1°. La résultante *AF* qui passe par le centre d'équilibre *I* des deux puissances *P*, *Q* qui la composent, est à la distance *AI* du centre *A* des forces au centre principal d'équilibre *I*, comme 2 est à 1.

2°. La résultante *AG* qui passe par le centre d'équilibre *K* des trois puissances *P*, *Q*, *R* dont elle est composée, est à la distance *AK* du centre *A* des forces au centre d'équilibre *K*, comme 3 est à 1.

3°. La résultante *AH* qui passe par le centre d'équilibre *L* des quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* dont elle est la résultante, est à la distance *AL* du centre *A* des forces au centre *L* d'équilibre, comme 4 est à 1 : & ainsi des autres.

LEMME.

253. *Si des quatre angles* A, B, C, D *d'un même parallélogramme on mène quatre parallèles* AE, BF, CG, DH *vers un même plan* EFGH *qui ne rencontre point le parallélogramme, la somme* AE + CG *des deux parallèles tirées par les angles opposés* A, C *sera égale à la somme* BF + DH *des deux autres parallèles menées par les deux autres angles opposés* B, D. Fig. 180 & 181.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les deux diagonales *AC*, *BD* du parallélogramme *ABCD*, & par leur intersection *I* soit menée vers le plan *EFGH* une droite *IK* parallèle aux quatre premières menées vers le même plan; enfin supposons que *E*, *F*, *G*, *H*, *K* sont les points où ces cinq parallèles rencontrent le plan *EFGH*.

1°. Les trois droites *AE*, *CG*, *IK* étant parallèles, & passant par une même droite *AC*, seront dans un même plan *ACGE*, & la droite *IK* coupera les deux droites *AC*, *EG* en parties proportionnelles. Ainsi puisque *AC* est coupée en deux parties égales par la droite *IK* qui part du centre *I* du parallélogramme *ABCD*, la droite *EG* sera pareillement coupée en deux parties égales par la même droite *IK* : d'où il suit que cette droite *IK* sera moyenne arithmétique entre les deux côtés parallèles *AE*, *CG* du trapèze *ABGE*, & qu'on aura $2IK = AE + CG$.

2°. Les trois droites BF, DH, IK étant parallèles, & passant par une même droite BID, seront dans un même plan $BDHF$: & comme la droite IK coupera le côté BD de ce plan en deux parties égales, la même droite IK coupera aussi le côté FH en deux parties égales, & sera moyenne arithmétique entre les deux côtés opposés BF, DH qui lui sont parallèles. Ainsi l'on aura $2IK = BF + DH$.

Mais nous venons de trouver $2IK = AE + CG$.

On aura donc $AE + CG = BF + DH$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 180 & 181. 254. Supposons que les quatre parallèles AE, BF, CG, DH sont perpendiculaires au plan $EFGH$, ce qui ne changera rien à ce qui vient d'être démontré dans le Lemme. Si par le point E où l'une AE de ces perpendiculaires rencontre le plan $EFGH$, on tire les droites EF, EG, EH aux trois points où les autres perpendiculaires rencontrent le même plan; la droite AE qu'on suppose perpendiculaire au plan $EFGH$, sera perpendiculaire aux trois droites EF, EG, EH, & ces trois droites seront réciproquement perpendiculaires sur AE.

Par les trois angles B, C, D du parallèlogramme A, B, C, D soient menées des perpendiculaires BL, CN, DM à la droite AE prolongée indéfiniment vers Z: les trois quadrilatères $EFBL$, $EGCN$, $EHDM$ seront trois parallélogrammes rectangles; ainsi l'on aura $LE = BF$, $NE = CG$, $ME = DH$.

Mais nous venons de voir (n°. 253) que $AE + CG = BF + DH$.

Donc on aura auſſi $AE + NE = LE + ME$.

C'eſt-à-dire que ſi des angles d'un parallélogramme $ABCD$, l'on mène des perpendiculaires BL, CN, DM vers une même droite AZ tirée par le quatrième angle A de ce parallélogramme, & qu'on prenne ſur cette droite AZ un point E qui ne ſoit pas entre ceux où la même ligne eſt rencontrée par les perpendiculaires BL, CN, DM; la ſomme $AE + NE$ des parties compriſes entre le point E & les deux points A, N qui répondront perpendiculairement aux extrémités de la diagonale AC, ſera égale à la ſomme $LE + ME$ des parties compriſes entre le même point E & les deux points L, M qui repondront perpendiculairement aux extrémités de l'autre diagonale BD du même parallélogramme $ABCD$.

COROLLAIRE II.

255. Puiſque $AE + NE = LE + ME$ dans les deux figures 180 & 181 :

1°. Si l'on retranche AE de chacune des quatre lignes qui compoſent cette égalité, on trouvera $NA = LA + MA$ dans la figure 180, où les trois perpendiculaires BL, CN, DM ſont d'un même côté du point A; c'eſt-à-dire que la partie NA compriſe entre l'angle A & la perpendiculaire menée par l'angle oppoſé C du parallélogramme $ABCD$, ſera égale à la ſomme $LA + MA$ des parties compriſes entre le même angle A & les deux perpendiculaires BL, DM menées par les deux autres angles oppoſés du même parallélogramme. Fig. 180.

2°. Si l'on retranche LE de chacun des termes qui compoſent l'égalité $AE + NE = LE + ME$. Fig. 181.

on trouvera $AL + NL = ML$ dans la figure 181, où le point A & les deux perpendiculaires CN, DM sont d'un même côté de la perpendiculaire BL.

Fig. 181. 3°. Si l'on retranche AE de chacun des termes de la même égalité $AE + NE = LE + ME$, on aura $NA = LE - AE + MA$ dans la figure 181, où les trois perpendiculaires BL, CN, DM ne rencontrent point la droite EZ d'un même côté du point A. Mais $LE = AE - LA$. Ainsi $LE - AE = - LA$; & par conséquent NA ou $LE - AE + MA = MA - LA$. C'est-à-dire que dans le cas où les deux perpendiculaires BL, DM tirées vers la droite EZ par les extrémités de la diagonale BD ne rencontrent point cette droite EZ d'un même côté du point A, la différence $AM - AL$ des parties comprises entre ces perpendiculaires & le point A, est égale à la partie NA comprise entre le point A & la perpendiculaire CN menée par l'extrémité C de l'autre diagonale AC.

THÉOREME.

Fig. 182. 256. *Tant de puissances* P, Q, R, S *qu'on voudra & leur force résultante étant appliquées à un même point* A *& représentées par des parties proportionnelles* AB, AC, AD, AE, AH *de leurs directions; si l'on tire par le même point* A *une droite quelconque* ZAe, *& qu'on mène à cette droite des perpendiculaires* Bb, Cc, Dd, Ee, Hh, *la droite* ZAe *sera coupée par toutes ces perpendiculaires de manière que la partie* Ah *qui répondra à la résultante* AH, *sera égale à la somme* Ab + Ac + Ad *des parties qui répondront aux*

trois puissances P, Q, R, *& qui seront du même côté que* Ah *par rapport au point* A, *moins la partie* Ae *qui répondra à la puissance* S *& qui sera de l'autre côté du point* A : *c'est-à-dire qu'on aura cette égalité*
Ah = Ab + Ac + Ad — Ae.

DÉMONSTRATION.

Pour avoir la droite *AH* qui représente la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, on a fait un parallélogramme *ABFC* sur les lignes *AB*, *AC* qui représentent les deux puissances *P*, *Q*; puis sur la diagonale *AF* de ce parallélogramme, & sur la droite *AD* qui représente la puissance *R*, on a construit un second parallélogramme *AFGD*; enfin sur la diagonale *AG* de ce second parallélogramme & sur la droite *AE* qui exprime la puissance *S*, on a fait un troisième parallélogramme *AGHE*, & l'on a pris (*n*°. 249) la diagonale de ce dernier parallélogramme pour représenter la direction & la quantité de force de la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, *S* qui sont toutes appliquées au même point *A*.

Or 1°. puisque *AGHE* est un parallélogramme, & que la droite *ZAe* a été tirée par son angle *A*, les droites *Hh*, *Gg*, *Ee* qu'on mènera par les autres angles de ce parallélogramme à la droite *ZAe*, diviseront cette ligne (*n*°. 255) de manière qu'on aura *Ah* = *Ag* — *Ae*.

2°. Puisque *AFGD* est aussi un parallélogramme, les droites *Gg*, *Ff*, *Dd* qu'on mènera par ses angles à la droite *ZAe*, diviseront aussi cette ligne de manière qu'on aura (*n*°. 255) *Ag* = *Af* + *Ad* : & comme on vient de trouver *Ah* = *Ag* — *Ae*, on aura *Ah* = *Af* + *Ad* — *Ae*.

3°. Comme *A B F C* eſt auſſi un parallélogramme, les droites *Ff*, *B b*, *C c* qu'on mènera par ſes angles perpendiculairement à la droite *Z A e* diviſeront cette ligne (*n*°. 255) de manière qu'on aura $Af = Ab + Ac$. Mais on vient de voir que $Ah = Af + Ad - Ae$. On aura donc $Ah = Ab + Ac + Ad - Ae$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 183. 257. Si la droite *Z A e* qu'on a tirée par le point *A*, d'où partent les directions de toutes les puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, eſt dirigée ſuivant la droite *A H* qui repréſente la réſultante de toutes ces puiſſances; les perpendiculaires *B b*, *C c*, *D d*, *E e* diviſeront la direction de cette réſultante de manière qu'on aura $AH = Ab + Ac + Ad - Ae$. Car la ligne *Ah*, qui étoit diſtinguée de *A H* dans la figure précédente, deviendra la réſultante *A H* dans le cas préſent; & comme on vient de trouver (*n*°. 256) $Ah = Ab + Ac + Ad - Ae$, on aura dans le cas préſent $AH = Ab + Ac + Ad - Ae$.

THÉOREME.

Fig. 184. 258. *Lorſque pluſieurs puiſſances* P, Q, R, S, *repréſentées par des parties* A B, A C, A D, A E *de leurs directions, tirent ou pouſſent un même point* A, *&* *que par les extrémités* B, C, D, E *de leurs proportionnelles on mène des perpendiculaires* B b, C c, D d, E e *à la droite* A H *qui repréſente la réſultante de toutes ces puiſſances; ces perpendiculaires diviſent la réſultante* A H *de manière que les parties* A b, A c, A d *priſes du côté de la réſultante, & correſpondantes aux proportionnelles* A B, A C, A D *des puiſſances* P, Q, R,

représentent les forces pour lesquelles ces puissances contribuent à la résultante, & que la partie A e *correspondante à la puissance* S, *& qui est dans la direction opposée à la résultante, représente la force avec laquelle la puissance* S *agit contre la résultante ; en sorte que la résultante* A H *des puissances* P, Q, R, S *est égale à* A b + A c + A d — A e.

DÉMONSTRATION.

Par le point *A*, d'où partent les directions de toutes les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, soient menées perpendiculairement à la résultante *AH* une droite *AI* dans le plan *AbB*, une droite *AK* dans le plan *AcC*, une droite *AL* dans le plan *AdD*, une droite *AM* dans le plan *AeE* ; & soient menées vers toutes ces lignes de droites *BI*, *CK*, *DL*, *EM* parallèles à la résultante *AH* : les quadrilatères *AbBI*, *AcCK*, *AdDL*, *AeEM* seront des parallélogrammes rectangles qui auront pour diagonales les droites *AB*, *AC*, *AD*, *AE* par lesquelles les puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sont représentées. Ainsi l'on pourra décomposer chacune de ces puissances en deux forces représentées par les côtés du parallélogramme rectangle dont elle sera la diagonale ; c'est-à-dire que

1°. Au lieu de la puissance *P* représentée par *AB*, l'on pourra prendre deux forces représentées par *Ab*, *AI*.

2°. Au lieu de la puissance Q représentée par *AC*, l'on pourra prendre deux forces représentées par *Ac*, *AK*.

3°. Au lieu de la puissance *R* représentée par *AD*, l'on pourra prendre deux forces exprimées par *Ad*, *AL*.

4°. Enfin au lieu de la puiſſance S repréſentée par AE, l'on pourra prendre deux forces repréſentées par Ae, AM; & l'on pourra toûjours faire la même choſe pour toutes les autres puiſſances, s'il y en a un plus grand nombre dont les directions partent du même point A.

En décompoſant ainſi les puiſſances P, Q, R, S, on aura à leur place deux ſortes de forces; les unes repréſentées par des parties Ab, Ac, Ad, Ae de la direction de la réſultante; les autres repréſentées par les droites AI, AK, AL, AM perpendiculaires à la réſultante.

Les forces repréſentées par Ab, Ac, Ad ayant la même direction que la réſultante, compoſeront une force qui aura la même direction qu'elle, & qui ſera repréſentée par $Ab + Ac + Ad$; & la force repréſentée par Ae étant directement contraire aux trois précédentes, détruira dans la force $Ab + Ac + Ad$ qui en réſulte, une force égale à Ae; en ſorte que le réſultat de quatre forces Ab, Ac, Ad, Ae ſe réduira à une force repréſentée par $Ab + Ac + Ad - Ae$, qui ſera égale à la réſultante AH (n°. 257).

Les autres forces repréſentées par AI, AK, AL, AM agiſſant perpendiculairement à la direction de la réſultante, & ne pouvant contribuer en rien pour la former, ſe détruiront néceſſairement. Car ſi elles ne ſe détruiſoient point, & qu'il en réſultât quelque force, cette force combinée ou compoſée avec la réſultante AH formeroit une autre réſultante dont AH ne ſeroit point la direction; ce qui ſeroit contre l'hypothèſe, où l'on ſuppoſe que les quatre puiſſances P, Q, R, S ont une réſultante dirigée ſuivant AH.

On a donc démontré que les puiſſances P, Q, R, S agiſſent

agissent pour ou contre la résultante *AH* avec des forces représentées par *Ab*, *Ac*, *Ad*, *Ae*, dont les trois premières, qui ont même direction que la résultante, sont additives, & dont la dernière qui a une direction opposée est soustractive; en sorte que la résultante *AH* des puissances P, Q, *R*, *S* est égale à $Ab + Ac + Ad - Ae$. C. Q. F. D.

THÉOREME.

259. *Lorsque plusieurs puissances* P, Q, R, S *dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque* ABCDEA, *sont perpendiculaires & proportionnelles aux côtés de suite* AB, BC, CD, DE *de ce polygone, leur résultante, qui est aussi dirigée dans le même plan, est perpendiculaire & proportionnelle à la droite* AE *qui termine les côtés extrêmes de ce polygone.* Fig. 185 & 186.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les diagonales *AC*, *AD* du polygone *ABCDE*.

1°. Les deux puissances *P*, Q étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés contigus *AB*, *BC* du triangle *ABC* & dirigées dans le plan de ce triangle, leur résultante sera perpendiculaire & proportionnelle au troisième côté *AC* du même triangle (*n°*. 245), & sera aussi dirigée dans le même plan; ainsi en nommant *X* la résultante de ces deux puissances, on aura $P : Q : X :: AB : BC : AC$.

2°. La force *X* résultante des deux puissances *P*, Q & la puissance *R* étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés *AC*, *CD* du triangle *ACD* & dirigées dans le plan de ce triangle, leur

résultante qu'on nommera Y, & qui sera celle des trois puissances P, Q, R, sera perpendiculaire & proportionnelle au troisième côté AD du même triangle, & sera encore dirigée dans le plan de ce triangle ou du polygone $ABCDE$; ainsi l'on aura $X : R : Y :: AC : CD : AD$; & par conséquent $P : Q : R : Y :: AB : BC : CD : AD$.

3°. La force résultante Y des trois puissances P, Q, R & la puissance S étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés AD, DE du triangle ADE, leur résultante qu'on nommera Z, & qui sera celle des quatre puissances P, Q, R, S, sera perpendiculaire & proportionnelle au troisième côté AE du même triangle, & dirigée dans le plan de ce triangle; ainsi l'on aura $Y : S : Z :: AD : DE : AE$; & par conséquent $P : Q : R : S : Z :: AB : BC : CD : DE : AE$.

Donc si plusieurs puissances P, Q, R, S dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque $ABCDEA$, sont perpendiculaires & proportionnelles aux côtés de suite AB, BC, CD, DE de ce polygone, leur résultante qui se trouvera aussi dirigée dans le même plan, sera perpendiculaire & proportionnelle à la droite AE qui terminera les côtés extrêmes du même polygone. C. Q. F. D.

Corollaire I.

Fig. 185 & 186. 260. Si les directions FP, GQ des deux puissances P, Q dirigées dans le plan du triangle ABC, sont perpendiculaires sur les milieux des côtés AB, BC auxquels ces puissances sont proportionnelles, elles se croiseront (*Géom. n°. 56*) au centre du cercle qui seroit circonscrit au triangle ABC; & la résultante

qui doit nécessairement passer par le point de concours des deux puissances composantes, passera par le centre de ce cercle : & comme elle sera perpendiculaire à la droite ou corde *A C* du même cercle, elle divisera cette corde en deux parties égales (*Géom. n°.* 70). Ainsi lorsque deux puissances *P*, *Q* dirigées dans le plan d'un triangle *A B C* sont perpendiculaires sur les milieux des côtés *A B*, *B C* auxquels elles sont proportionnelles, leur résultante est aussi perpendiculaire sur le milieu du côté *A C* auquel elle est proportionnelle.

La résultante *X* des deux puissances *P*, *Q* étant perpendiculaire sur le milieu de la droite *A C* par laquelle sa quantité de force est représentée; si la puissance *R*, qu'on suppose proportionnelle à *C D*, est perpendiculaire sur le milieu de ce côté, la résultante *Y* de la force *X* & de la puissance *R* ou des trois puissances *P*, *Q*, *R* sera par la même raison perpendiculaire sur le milieu de la droite *A D* par laquelle la quantité de force de cette résultante sera représentée.

Enfin la résultante *Y* des trois puissances *P*, *Q*, *R* étant perpendiculaire sur le milieu de la droite *A D* à laquelle elle est proportionnelle; si la puissance *S* proportionnelle au côté *D E* est perpendiculaire sur le milieu de ce côté, la résultante *Z* de la force *Y* & de la puissance *S* sera perpendiculaire sur le milieu du côté *A E* par lequel sa quantité de force sera représentée.

Donc si plusieurs puissances *P*, *Q*, *R*, *S* dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque *ABCDEA*, sont perpendiculaires sur les milieux des côtés de suite

A B, *B C*, *C D*, *D E* de ce polygone, leur résultante qui sera aussi dirigée dans le même plan sera perpendiculaire à la droite *A E* qui terminera les proportionnelles extrêmes *A B*. *D E*. & sera proportionnelle à cette droite *A E*.

COROLLAIRE II.

Fig. 187. 261. Si tous les côtés *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, *E L*, *L M*, *M A* d'un polygone plan *A B C D E L M A* sont tirés par autant de puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X* proportionnelles à ces côtés, dirigées dans le plan de ce polygone toutes vers son intérieur ou toutes vers son extérieur, & appliquées aux milieux *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *N*, *O* des mêmes côtés, toutes ces puissances seront en équilibre.

Car si l'on divise le polygone en deux parties quelconques par une diagonale *A E*, la quantité de force de la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sera représentée par la droite *A E*, & sa direction sera perpendiculaire au milieu de la même droite (*n*°. 260) : & comme la quantité de force de la résultante des puissances *T*, *V*, *X* sera représentée par la même droite *A E* & perpendiculaire au milieu de cette droite, il est évident que la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, *S* & celle des puissances *T*, *V*, *X* seront égales & directement opposées, & seront par conséquent en équilibre.

COROLLAIRE III.

Fig. 188. 262. Si l'on coupe un prisme perpendiculairement à sa directrice *a f*, par un plan *A B C D E A*, les faces parallélogrammiques *a g*, *b h*, *c i*, *d k*, *a k* seront proportionnelles à leurs sections *A B*, *B C*, *C D*, *D E*,

EA, & les droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, *VZ* qu'on mènera dans le plan de section *ABCDEA* perpendiculairement à ses côtés, seront perpendiculaires aux faces *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *ak* du prisme. Mais on vient de voir que des puissances *P*, *Q*, *R*, *S* qui seroient appliquées aux droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, & qui seroient proportionnelles aux côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, auront une résultante *Z* perpendiculaire à *AE*, & dont la quantité de force sera représentée par la même droite *AE*. Donc si plusieurs puissances *P*, *Q*, *R*, *S* dirigées dans un même plan de section perpendiculaire à la directrice d'un prisme, sont proportionnelles aux faces du prisme sur lesquelles elles sont perpendiculaires; leur force résultante sera proportionnelle & perpendiculaire au parallélogramme *ak* qui terminera les faces *ag*, *dk* auxquelles les puissances extrêmes *P*, *S* seront perpendiculaires & proportionnelles.

COROLLAIRE IV.

263. Si le prisme *abcdefghik* est droit & coupé au milieu de sa longueur par le plan *ABCDEA*, les milieux *F*, *G*, *H*, *I*, *V* des côtés de ce plan seront les centres des faces parallélogrammiques *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *ak* du prisme; & les droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, *VZ* perpendiculaires à ces faces seront dans le plan *ABCDEA* & perpendiculaires à ses côtés. Mais on vient de voir que des puissances *P*, *Q*, *R*, *S* dirigées dans le plan *ABCDEA* perpendiculairement sur les milieux de ses côtés, & qui seront proportionnelles aux mêmes côtés, auront une résultante proportionnelle à *AE* & perpendiculaire au milieu de cette ligne. Donc si plusieurs puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sont proportionnelles aux faces parallélogrammiques Fig. 188.

ag, bh, ci, dk d'un prisme droit, & dirigées perpendiculairement sur les milieux de ces faces, leur résultante sera proportionnelle à l'aire du parallélogramme *ak* & dirigée perpendiculairement au centre *V* de ce parallélogramme.

COROLLAIRE V.

Fig. 189. 264. Lorsque toutes les faces *ag, bh, ci, dk, en, lo, mf* d'un prisme droit sont poussées ou tirées perpendiculairement toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du prisme par des puissances *P, Q, R, S, T, V, X* proportionnelles à leurs étendues & appliquées à leurs centres ; si l'on divise ce prisme par un plan diagonal *ak* qui sera nécessairement un parallélogramme rectangle, la résultante des puissances *P, Q, R, S* sera proportionnelle au parallélogramme *ak*, & sera dirigée perpendiculairement au centre de ce parallélogramme (*n°.* 263) : & comme la résultante des puissances *T, V, X* sera aussi proportionnelle au parallélogramme *ak*, & sera dirigée perpendiculairement à son centre, elle sera égale & directement opposée à la résultante des puissances *P, Q, R, S.* Ainsi ces deux résultantes se détruiront mutuellement ; & par conséquent les puissances *P, Q, R, S, T, V, X* qu'on suppose dirigées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du prisme droit, seront en équilibre.

COROLLAIRE VI.

265. En faisant attention à la démonstration du Théorème & de ses Corollaires, on reconnoîtra aisément que si le nombre des côtés du polygone ou le nombre des faces parallélogrammiques du prisme droit étoit plus grand & devenoit même infiniment

plus grand qu'on ne l'a exprimé dans la figure, tout ce qu'on vient de démontrer auroit encore lieu; c'est-à-dire que

1°. Si toutes les parties d'une ligne courbe *A B C D E* décrite dans un plan, ou si toutes les parties d'une surface courbe engendrée par la courbe *A B C D E* mûe parallèlement à sa première position le long d'une directrice *A F* perpendiculaire au plan de cette courbe, sont tirées ou poussées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors par une infinité de puissances perpendiculaires & proportionnelles à ces parties; la résultante de toutes ces forces sera proportionnelle à la corde *A E* de cette courbe ou au rectangle *A F G E* décrit par cette corde, & sera perpendiculaire sur le milieu de cette corde ou sur le centre du rectangle *A F G E*. Car on peut toûjours supposer que des forces appliquées à des parties infiniment petites sont appliquées aux milieux de ces parties. Fig. 190 & 191.

2°. Lorsque toutes les parties d'une ligne courbe *A B C D E L M A*, ou toutes les parties d'une surface courbe engendrée par le contour *A B C D E L M A* d'un plan mû parallèlement à sa première position le long d'une directrice *A F* qui lui est perpendiculaire, sont poussées ou tirées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors par une infinité de forces perpendiculaires & proportionnelles aux grandeurs de ces parties; toutes ces puissances sont en équilibre. Car si l'on coupe le plan *A B C D E L M A* par une droite quelconque *A E*, & le solide que ce plan engendre par un parallélogramme *F A E G*, toutes les puissances appliquées à la portion de courbe *A B C D E* ou à la portion de surface courbe *F A B C D E G*

auront une résultante proportionnelle à la droite *AE* ou au parallélogramme *FAEG*; & la direction de cette résultante sera perpendiculaire sur le milieu de cette corde ou de ce parallélogramme : & comme la résultante de toutes les forces appliquées à l'autre portion de courbe *AMLE* ou à l'autre portion de surface courbe *FAMLEG* sera aussi proportionnelle à la droite *AE* ou au rectangle *FE*, & aura une direction perpendiculaire sur le milieu de cette droite ou de ce rectangle; toutes les forces appliquées au contour de la courbe ou de la surface courbe se réduiront à deux résultantes égales & directement opposées qui se détruiront mutuellement.

THÉOREME.

Fig. 192. 266. *Si par les extrémités* C, D *& le milieu* L *d'un côté ou d'une portion* CD *de côté quelconque d'un polygone* ABCDE, *l'on mène dans le plan de ce polygone des perpendiculaires* CH, DK, LI *à une même droite* AG, *& que l'on tire* CF *parallèlement à* AG; *une puissance* P *qui sera dirigée dans le plan de ce polygone perpendiculairement sur le milieu de* CD, *& dont la quantité de force sera représentée par* CD × LI, *pourra se décomposer en deux forces, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle à* AG. *La quantité de force perpendiculaire à* AG *sera représentée par l'aire du trapèze* HCDK, *& la quantité de force parallèle à* AG *sera exprimée par* FD × LI.

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré *LN* parallèlement à *AG*, & pris une partie *LO* de la direction de la puissance *P* pour représenter cette puissance, soient menées par le

point O les droites OM, ON parallèlement aux deux lignes AG, LI. La puissance P représentée par la diagonale LO du parallélogramme rectangle $LMON$ pourra (*n°.* 227) se décomposer en deux forces Q, R qui seront représentées par les côtés contigus LM, LN du même parallélogramme; c'est-à-dire que l'on aura $P : Q : R :: LO : LM : LN$ ou $:: LO : LM : MO$.

Mais les deux triangles LMO, CFD ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, seront semblables & donneront $LO : LM : MO :: CD : CF : FD$. Ainsi l'on aura $P : Q : R :: CD : CF : FD$ ou $:: CD \times LI : CF \times LI : FD \times LI$.

Donc si la puissance P appliquée perpendiculairement au milieu de CD est exprimée par $CD \times LI$, comme on le suppose dans l'énoncé du Théorème, la force Q qui en résultera suivant LI perpendiculairement à AG sera exprimée par $CF \times LI$, c'est-à-dire par l'aire du trapèze $HCDK$; & la force R qui en résultera parallèlement à AG sera représentée par $FD \times LI$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

267. Un polygone $ABCDEdcba$ étant terminé par une droite Aa; soient tirées par les extrémités C, D & par le milieu L d'un côté CD des parallèles Cc, Dd, Ll à la droite Aa, & par les points où ces parallèles rencontreront le contour du polygone soient menées des perpendiculaires CH, DK, LI, ch, dk, li à la même droite Aa. Cela posé, si l'on applique dans le plan de ce polygone perpendiculairement aux milieux des deux droites CD, cd des forces dirigées toutes Fig. 193.

deux vers le dedans ou toutes deux vers le dehors du polygone, dont les quantités ſoient repréſentées par $CD \times LI$, $cd \times li$, & qu'on décompoſe chacune de ces forces en deux autres dont l'une ſoit perpendiculaire & l'autre parallèle à Aa; les forces perpendiculaires à Aa ſeront repréſentées par les trapèzes $HCDK$, $hcdk$, & les forces contraires parallèles à Aa ſeront (*n°.* 268) repréſentées par $FD \times LI$, $fd \times li$.

Mais les droites FD, fd étant parallèles & compriſes entre les parallèles Cc, Dd ſeront égales, & les parallèles LI, li compriſes entre les parallèles Ll, Aa ſeront auſſi égales; & par conſéquent les deux quantités $FD \times LI$, $fd \times li$ ou les deux forces oppoſées parallèles à Aa qu'elles repréſenteront, ſeront égales. Ainſi ces deux forces ſe détruiront mutuellement; & des deux forces appliquées perpendiculairement aux milieux des deux côtés correſpondans CD, cd, il ne reſtera que deux forces dirigées ſuivant LI, li perpendiculairement à Aa, dont les quantités ſeront repréſentées par les deux trapèzes $HCDK$, $hcdk$.

Si l'on tire encore Bb parallèle à Aa, & qu'on applique dans le plan du polygone perpendiculairement aux milieux des côtés correſpondans BC, bc des forces dirigées toutes deux vers le dedans ou toutes deux vers le dehors du polygone, & dont les quantités ſoient repréſentées par les produits de ces côtés multipliés par les diſtances de leurs milieux à la droite Aa; chacune de ces forces ſe décompoſera en deux autres, dont l'une ſera perpendiculaire & l'autre parallèle à Aa. Les forces contraires parallèles à Aa ſe détruiront mutuellement, & les valeurs des

deux qui resteront seront représentées par les trapèzes *MBCH*, *mbch*.

Donc si l'on divise le polygone *ABCDEdcba* par une infinité de lignes droites parallèles à *Aa*, & qu'au milieu de chaque côté compris entre deux parallèles, on applique une force dont la quantité soit représentée par le produit de ce côté multiplié par la distance de son milieu à la droite *Aa*; il ne résultera de toutes ces forces, qu'on suppose dirigées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du polygone, que des forces perpendiculaires à *Aa* dont la somme sera représentée par l'aire du polygone *ABCDEdcba*: en sorte que la résultante de toutes les forces appliquées à tous les côtés du polygone passera par son centre de gravité, sera perpendiculaire à *Aa*, & sera représentée quant à sa quantité de force par l'aire de ce polygone.

COROLLAIRE II.

268. Imaginons maintenant que le polygone *ABCDEdcba* est la section d'un prisme coupé par le milieu perpendiculairement à sa longueur. Toutes les forces appliquées dans le plan du polygone *ABCDEdcba* perpendiculairement aux milieux des côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. & proportionnelles aux produits de ces côtés multipliés chacun par la distance de son milieu à la droite *Aa*, se trouveront perpendiculaires sur les milieux de toutes les faces parallélogrammiques du prisme droit, & proportionnelles aux produits de ces faces multipliées chacune par la distance de son centre au plan dont la droite *Aa* est le profil. Fig. 193.

Le centre de gravité de la section *ABCDEdcba*

du prisme sera celui de ce prisme, & la ligne tirée par le centre de gravité de cette section perpendiculairement sur la droite *A a* sera une perpendiculaire menée du centre de gravité du prisme sur le plan dont *A a* est le profil; en sorte que la résultante de toutes les forces appliquées perpendiculairement aux milieux des côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. de la section *ABCDEdcba*, ou perpendiculairement aux milieux des faces parallélogrammiques du prisme, sera une force dirigée du centre de gravité de ce prisme perpendiculairement vers le plan dont *A a* est la section.

Enfin la quantité de force de la résultante de toutes les puissances appliquées perpendiculairement aux milieux des côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. étant représentée par l'aire du polygone *ABCDEdcba*. lorsque chacune des forces particulières appliquées à ces côtés est représentée par le produit du côté sur lequel elle agit, multiplié par la distance du milieu de ce côté à la droite *A a*; il est clair que la résultante de toutes les forces appliquées perpendiculairement aux centres des faces parallélogrammiques d'un prisme sera représentée par le solide de ce prisme, lorsque toutes les forces particulières appliquées à ses faces seront proportionnelles aux produits des mêmes faces multipliées par les distances de leurs milieux au plan dont *A a* est la coupe.

THÉOREME.

Fig. 194. 269. *Lorsqu'une puissance* P *tire ou pousse perpendiculairement le plan d'un trapèze* ABCD *compris entre deux plans parallèles* AIKD, NBCO, *& coupé dans le milieu de sa longueur suivant une ligne* GH

parallèle à ses côtés A D, B C, *par un plan* I L M K *perpendiculaire aux deux plans parallèles* A I K D, N B C O : *si par les côtés* A B, D C, A D *du trapèze* A B C D *l'on mène encore perpendiculairement au plan* N B C O *trois plans* A N B, D O C, A N O D, *en sorte que tous ces plans se terminent mutuellement, & que le trapèze* N B C O *soit la projection du trapèze* A B C D ; *on pourra décomposer la puissance* P *en deux forces* Q, R, *l'une perpendiculaire au plan de projection* N B C O, *l'autre perpendiculaire au plan* I L M K : *& si la quantité de force de la puissance* P *est représentée par l'aire du trapèze* A B C D *auquel elle est appliquée perpendiculairement, la force* Q *qui en résultera perpendiculairement au plan* N B C O *sera représentée par l'aire de ce plan, & l'autre force* R *qui se trouvera perpendiculaire au plan* I L M K *sera représentée par l'aire de ce plan.*

DÉMONSTRATION.

Par le point *V* où la puissance *P* est appliquée perpendiculairement au plan du trapèze *ABCD*, soit imaginé un plan *EFT* auquel les parallèles *BC*, *GH*, *AD* soient perpendiculaires : les quatre plans *ABCD*, *NBCO*, *ANOD*, *ILMK* qui passeront par ces trois lignes seront perpendiculaires au plan *EFT*, & ce plan *EFT* sera réciproquement perpendiculaire sur les quatre plans *ABCD*, *NBCO*, *ANOD*, *ILMK*. Ainsi les directions *VP*, *VQ*, *VR* de la puissance *P* & des deux forces Q, *R* dans lesquelles on doit décomposer cette puissance, étant supposées perpendiculaires aux trois plans *ABCD*, *NBCO*, *ILMK*, seront dans ce plan *EFT* & perpen-

diculaires à ses trois côtés *E F, F T, E T*: en sorte que si l'on considère la puissance *P* comme la résultante des deux forces Q, *R*, on aura (*n°*. 233) *P* : Q : *R* :: *E F* : *F T* : *E T* & par conséquent :: *E F* × *G H* : *F T* × *G H* : *E T* × *G H*. Le Théorème sera donc démontré, si l'on fait voir que les trois quadrilatères *A B C D*, *N B C O*, *I L M K* sont égaux aux trois produits *E F* × *G H*, *F T* × *G H*, *E T* × *G H*.

Puisque les quatre plans *ABCD*, *NBCO*, *ANOD*, *ILMK* sont perpendiculaires au plan *E F T*, les droites *B C*, *G H*, *A D*, *L M*, *N O* dans lesquelles ils se rencontrent, sont aussi perpendiculaires à ce plan (*Géom. n°*. 423) & par conséquent parallèles entr'elles. Donc 1°. les deux côtés opposés *B C*, *A D* du trapèze *A B C D* sont perpendiculaires au côté *E F* du triangle *E F T*, & ce côté *E F* est la hauteur de ce trapèze; & comme la droite *G H* menée parallèlement aux côtés opposés *A D*, *B C* du trapèze *A B C D* par le milieu de sa hauteur *E F*, est sa largeur moyenne, l'aire de ce trapèze est égale au produit *E F* × *G H*. 2°. Les côtés *B C*, *N O* du trapèze *N B C O* sont perpendiculaires au côté *F T* du plan *E F T*, & par conséquent *F T* est la hauteur de ce trapèze.

Les plans *I L M K*, *A N O D* menés par les deux parallèles *G H*, *A D* perpendiculairemenr sur le plan *N B C O*, sont parallèles, & les longueurs des deux trapèzes *A B C D*, *N B C O* sont coupées proportionnellement par le plan *I L M K*; ainsi puisque *G H* coupe le trapèze *A B C D* dans le milieu de sa longueur, la droite *L M* parallèle aux deux droites *B C*, *N O*, coupe aussi le trapèze *N B C O* dans le milieu de sa longueur, & est sa largeur moyenne.

Donc l'aire de ce trapèze, qui est le produit de sa hauteur & de sa largeur moyenne, est égale au produit $FT \times LM$.

Enfin les cinq plans $ILMK$, $ANOD$, ANB, DOC, ETF étant tous compris entre les mêmes plans parallèles $AIKD$, $NBCO$, & perpendiculaires à ces derniers plans, les droites IL, KM, ET dans lesquelles ils se coupent sont égales, perpendiculaires au même plan $NBCO$, & par conséquent parallèles. Donc 1°. les deux droites GH, LM comprises entre les parallèles IL, KM sont égales; & puisque l'aire du trapèze $NBCO$ est égale au produit $FT \times LM$, elle est aussi égale au produit $FT \times GH$. 2°. Le quadrilatère $ILMK$ est un parallélogramme rectangle, dont l'aire est égale au produit $KM \times LM$, ou au produit $ET \times GH$; puisqu'on vient de voir que $KM = ET$ & $LM = GH$.

Il est donc démontré que les surfaces des trois quadrilatères $ABCD$, $NBCO$, $ILMK$ sont égales aux trois produits $EF \times GH$, $FT \times GH$, $ET \times GH$. Ainsi puisqu'on vient de trouver que $P : Q : R :: EF \times GH : FT \times GH : ET \times GH$, on aura aussi $P : Q : R :: ABCD : NBCO : ILMK$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

270. Comme le côté AD du trapèze $ABCD$ peut être supposé aussi petit qu'on voudra, sans qu'il arrive aucun changement aux rapports qu'on vient de démontrer entre la puissance P & les deux forces Q, R dans lesquelles elle a été décomposée : lorsque ce côté AD sera nul, c'est-à-dire lorsque le trapèze $ABCD$ deviendra un triangle BAC dont la pro- Fig. 194.

jection sera un triangle NBC, & que le rectangle $ILMK$ sera réduit à un autre rectangle $ILmk$ dont la base Lm sera la moitié de celle BC du triangle BAC, on aura $P : Q : R :: BAC : BNC : ILmk$.

Corollaire II.

Fig. 194. 271. La projection $NBCO$ de la figure $ABCD$ étant déterminée par des perpendiculaires tirées de tous les points de cette figure sur le plan BO, il est aisé de voir que si le point V est le centre de gravité de la figure $ABCD$, la droite VS menée de ce point perpendiculairement sur le plan BO, déterminera sur ce plan un point S qui sera le centre de gravité de la projection $NBCO$.

Donc si la puissance P, dont la quantité de force est représentée par l'aire du trapèze $ABCD$, est appliquée perpendiculairement au centre de gravité V de ce trapèze, & qu'on la décompose en deux forces Q, R dont les directions VQ, VR soient perpendiculaires, l'une au plan de projection $NBCO$, & l'autre au plan $ILMK$; la direction de la force Q dont la quantité sera représentée par l'aire de la projection $NBCO$, passera nécessairement par le centre de gravité S de cette projection.

Corollaire III.

Fig. 194. 272. Si la hauteur EF du trapèze $ABCD$ devient infiniment petite, on pourra regarder ce trapèze comme un parallélogramme dont le centre de gravité V sera au milieu de la droite GH qui divisera ce parallélogramme en deux parties égales: & comme le milieu de la droite GH sera aussi le centre de gravité du parallélogramme $ILMK$, la puissance

puissance *P* appliquée perpendiculairement au centre de gravité *V* du plan *ABCD* se décomposera en deux forces Q, *R* dont les directions passeront par les centres de gravité des deux plans *NBCO*, *ILMK*, & seront perpendiculaires à ces plans.

COROLLAIRE IV.

273. Imaginons une tranche solide infiniment mince comprise entre des plans parallèles *ABCDEA*, *LMNOPL*, & terminée latéralement par des trapèzes *ALMB*, *BMNC*, *CNOD*, *DOPE*, *EPLA*. Si l'on coupe cette tranche suivant ses arrêtes *LA*, *MB*, *NC*, *OD*, *PE*, *LM*, *MN*, *NO*, *OP*, *PL* par des plans *ALF*, *BMG*, *CNH*, *DOI*, *EPK*, *LFGM*, *MGHN*, *NHIO*, *OIKP*, *PKFL* perpendiculairement au plan *ABCDEA*, pour avoir sur ce plan les projections *FABG*, *GBCH*, *HCDI*, *IDEK*, *KEAF* qui répondent perpendiculairement aux talus ou trapèzes latéraux de la tranche solide; & si, après avoir refendu cette tranche solide par un plan *abcdea* conduit parallèlement à ses bases opposées parallèles, à distances égales de ces bases, l'on mène par les sections *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* des trapèzes, & perpendiculairement à la base *ABCDEA*, des plans *XQRY*, *YRSZ*, *ZSTW*, *WTV&*, *&VQX* qui soient terminés par les bases parallèles de la tranche solide, afin d'avoir un prisme droit compris entre des bases parallèles *QRSTVQ*, *XYZW&X*: il suit du Théorème qu'on vient de démontrer & de son Corollaire III, que lorsqu'on appliquera perpendiculairement aux centres de gravité des talus ou trapèzes latéraux *ALMB*, *BMNC*, *CNOD*, *DOPE*, *EPLA* des puissances proportionnelles à Fig. 195.

ces trapèzes ou repréſentées par leurs aires, ces puiſſances ſe décompoſeront en deux ſortes de forces, les unes perpendiculaires au plan *ABCDEA* qui ſeront repréſentées par les projections *FABG*, *GBCH*, *HCDI*, *IDEK*, *KEAF* & dont les directions paſſeront par les centres de gravité de ces projections, les autres perpendiculaires aux rectangles *XQRY*, *YRSZ*, *ZSTW*, *WTV&*, *&VQX*, qui ſeront repréſentées par les aires de ces rectangles, & qui paſſeront par leurs centres de gravité.

Toutes les forces perpendiculaires aux rectangles *XQRY*, *YRSZ*, *ZSTW*, *WTV&*, *&VQX* étant proportionnelles à ces rectangles qui ſont tous de même hauteur, ſeront auſſi proportionnelles à leurs baſes ou à leurs largeurs *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*: & comme elles ſont appliquées aux centres de gravité de ces rectangles, elles ſeront appliquées aux milieux des lignes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* qui ſont à diſtances égales des deux plans parallèles qui terminent ces rectangles. Donc (*n*°. 264) toutes ces forces ſe détruiront mutuellement.

Ainſi de toutes les forces appliquées aux talus ou trapèzes latéraux de la tranche ſolide, il ne reſtera que des forces dont les quantités ſeront repréſentées par les projections *FABG*, *GBCH*, *HCDI*, *IDEK*, *KEAF* de ces trapèzes, & dont les directions rencontreront perpendiculairement les centres de gravité des mêmes projections.

COROLLAIRE V.

Fig. 195. 274. Mais toutes les forces dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité des trapèzes *FABG*, *GBCH*, *HCDI*, *IDEK*, *KEAF* &

représentées par les aires de ces trapèzes, étant parallèles, il n'en résultera qu'une seule force dont la quantité sera représentée par la somme des mêmes trapèzes, & dont la direction passera par le centre de gravité du système de tous ces trapèzes.

Comme on peut supposer que tous les solides sont divisés en tranches parallèles infiniment minces, & que les talus ou trapèzes latéraux de ces lames composent les surfaces de ces solides : il est évident que si l'on applique perpendiculairement aux centres de gravité de toutes les parties de la surface d'un solide terminé par un plan, des puissances proportionnelles à ces parties, toutes ces puissances se décomposeront en deux sortes de forces, les unes parallèles au plan qui terminera le solide & qui se détruiront mutuellement, les autres perpendiculaires au même plan & dont la somme sera représentée par l'aire de ce plan, si les plans qui lui seront menés perpendiculairement par les arrêtes du solide, tombent tous au-dedans de sa surface; en sorte qu'il ne résultera à ce corps qu'une seule force dont la quantité sera représentée par l'aire du plan qui le terminera, & dont la direction, qui sera perpendiculaire au même plan, passera par son centre de gravité.

COROLLAIRE VI.

275. Lorsqu'une tranche infiniment mince de solide est comprise entre deux plans *ABCDEA*, *LMNOPL* parallèles à un même plan *abcdea*, & que, par des perpendiculaires menées de tous les points des talus ou trapèzes latéraux de cette lame sur le plan *abcdea*, on a projeté tous ces talus sur ce plan; si des centres de gravité *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* de Fig. 196.

tous les trapèzes latéraux de la même lame, on mène encore des perpendiculaires *Qq*, *Rr*, *Ss*, *Tt*, *Vu* sur le plan de projection, toutes ces perpendiculaires seront égales à cause de l'épaisseur infiniment petite de la lame; & les points *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, où elles rencontreront les projections des talus latéraux, seront les centres de gravité de ces projections. Or comme on pourra supposer que chaque solide tel que *ABMLabml* compris entre un trapèze & sa projection, est engendré par toutes les parties de cette projection mûes suivant des parallèles à *qQ*, & que pendant ce mouvement le centre de gravité *q* du plan générateur *abml* décrira la droite *qQ*; il est évident que le solide *ABMLabml* sera égal au produit $abml \times qQ$, & que les autres solides *BCNMbcnm*, *CDONcdon*, *DEPOdepo*, *EALPealp* compris entre les autres trapèzes & leurs projections, seront par la même raison égaux aux produits $bcnm \times rR$, $cdon \times sS$, $depo \times tT$, $ealp \times uV$. Ainsi puisque toutes les lignes *qQ*, *rR*, *Ss*, *tT*, *uV* sont égales, les solides compris entre les trapèzes latéraux & leurs projections seront proportionnels à ces projections.

Cela posé, si l'on applique perpendiculairement aux centres de gravité des trapèzes *ABML*, *BCNM*, *CDON*, *DEPO*, *EALP* des puissances *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* exprimées par $ABML \times qQ$, $BCNM \times rR$, $CDON \times sS$, $DEPO \times tT$, $EALP \times uV$; ces puissances se décomposeront en deux sortes de forces, les unes parallèles au plan *abcdea* qui se détruiront mutuellement, les autres dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité des projections *abml*, *bcnm*, *cdon*, *depo*, *ealp*, dont les quantités seront représentées par les produits $abml \times qQ$,

$bcnm \times rR$, $cdon \times sS$, $depo \times tT$, $ealp \times uV$, c'eſt-à-dire par les ſolides $ABMLabml$, $BCNMbcnm$, $CDONcdon$, $DEPOdepo$, $EALPealp$.

Les lignes qQ, rR, sS, tT, uV étant égales, & les puiſſances Q, R, S, T, V étant repréſentées par les produits $ABML \times qQ$, $BCNM \times rR$, $CDON \times sS$, $DEPO \times tT$, $EALP \times uV$; ces puiſſances ſeront proportionnelles aux trapèzes $ABML$, $BCNM$, $CDON$, $DEPO$, $EALP$: ainſi (*n°.* 273) les forces qui en réſulteront parallèlement au plan $abcdea$ ſe détruiront mutuellement, & les puiſſances appliquées aux trapèzes latéraux ſe réduiront à des forces dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité q, r, s, t, u de leurs projections.

Si les puiſſances Q, R, S, T, V étoient repréſentées par les aires des trapèzes auxquels elles ſont appliquées, les forces qui en réſulteroient perpendiculairement aux centres de gravité q, r, s, t, u des projections de ces trapèzes, & que nous nommerons auſſi q, r, s, t, u, ſeroient repréſentées par les aires de ces projections (*n°.* 269); c'eſt-à-dire qu'on auroit

$$Q : q :: ABML : abml \text{ ou } :: ABML \times qQ : abml \times qQ$$
$$R : r :: BCNM : bcnm \text{ ou } :: BCNM \times rR : bcnm \times rR$$
$$S : s :: CDON : cdon \text{ ou } :: CDON \times sS : cdon \times sS$$
$$T : t :: DEPO : depo \text{ ou } :: DEPO \times tT : depo \times tT$$
$$V : u :: EALP : ealp \text{ ou } :: EALP \times uV : ealp \times uV.$$

Mais on a ſuppoſé que les puiſſances Q, R, S, T, V ſont véritablement repréſentées par les produits $ABML \times qQ$, $BCNM \times rR$, $CDON \times sS$, $DEPO \times tT$, $EALP \times uV$.

Donc les forces q, r, s, t, u qui en réſultent perpendiculairement aux centres de gravité des projections, ſont repréſentées par les produits $abml \times qQ$,

bcnmxrR, *cdonxsS*, *depoxtT*, *ealpxuV*, c'est-à-dire par les solides *ABMLabml*, *BCNMbcnm*, *CDONcdon*, *DEPOdepo*, *EALPealp*.

Et comme les lignes *qQ*, *rR*, *sS*, *tT*, *uV* qui passent par les centres de gravité des faces opposées de ces solides, passeront aussi par les centres de gravité des mêmes solides, à cause que les trapèzes latéraux de la lame que l'on considère sont infiniment étroits ; il est évident que la force qui résultera de toutes les forces *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, passera par le centre de gravité du système de tous les solides qui seront compris entre les trapèzes latéraux de la lame que l'on considère & leurs projections ; en sorte que pour contrebalancer toutes les forces *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, il faudra employer une force représentée par la somme des mêmes solides, dont la direction passe par le centre de gravité du système de tous ces solides, & soit perpendiculaire au plan de projection *abcdea*.

Comme on démontrera la même chose sur toutes les autres tranches d'un solide, on peut conclurre que si toutes les parties de la surface d'un segment de solide coupé ou terminé par un plan, sont poussées avec des forces dirigées perpendiculairement aux centres de gravité de ces parties, & représentées par les produits faits de ces parties multipliées par leurs distances à un même plan ; toutes ces forces se réduiront à une seule qui sera dirigée perpendiculairement vers le plan qui termine le segment, qui passera par le centre de gravité du solide compris entre la surface poussée par toutes les forces & le plan duquel on a pris toutes les distances à cette surface, & qui sera représentée par ce solide.

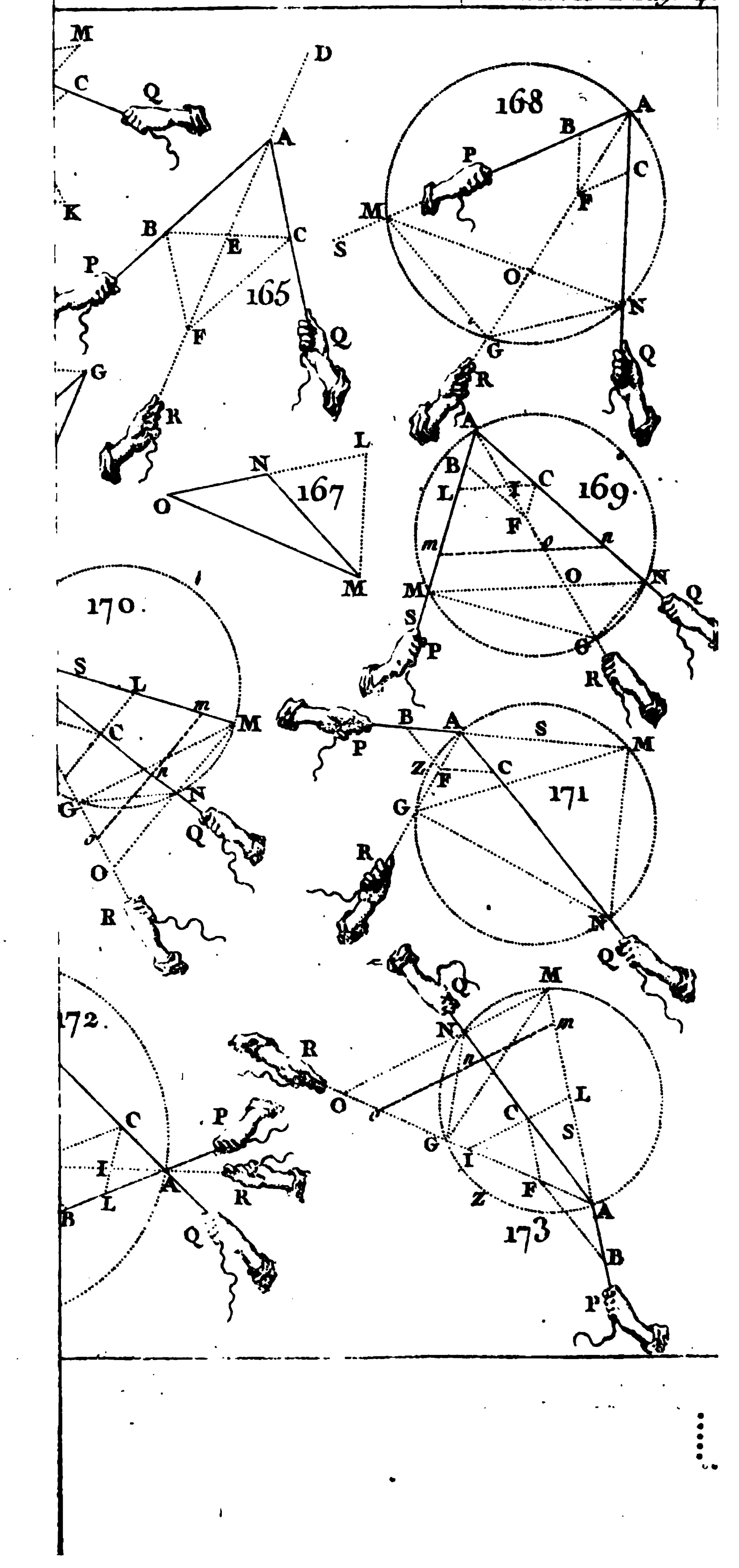
157

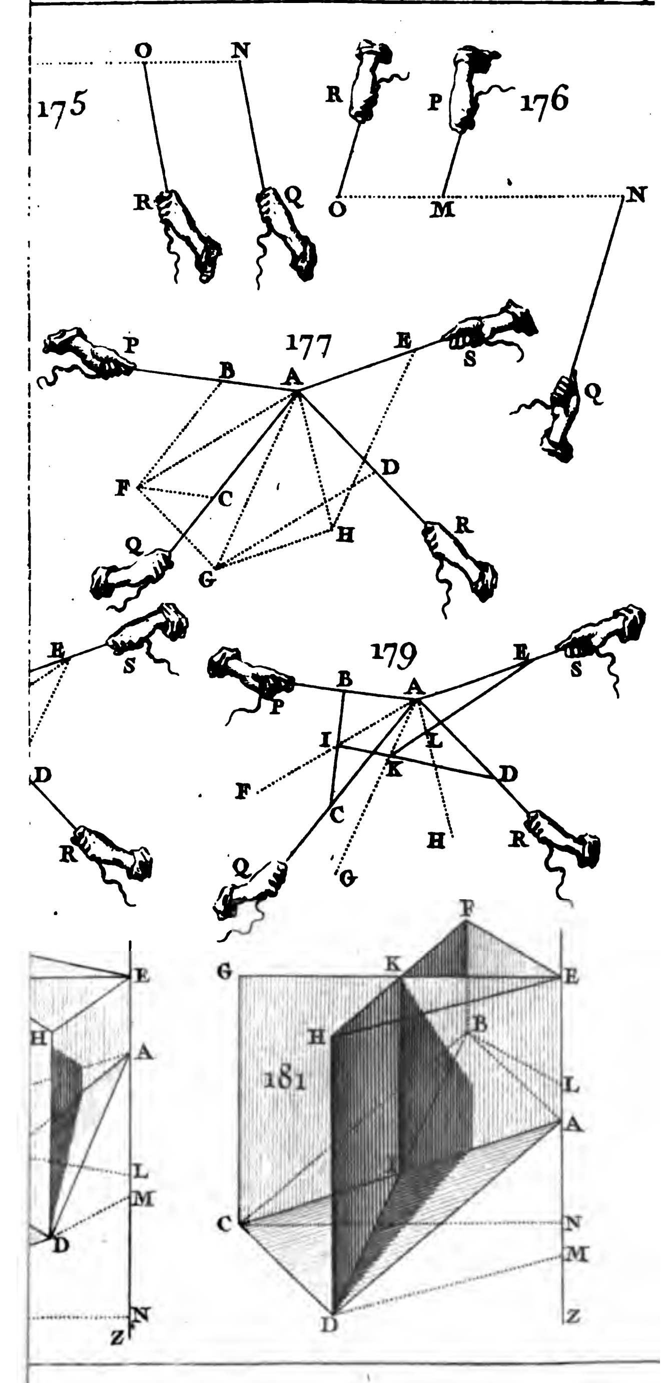
159

161

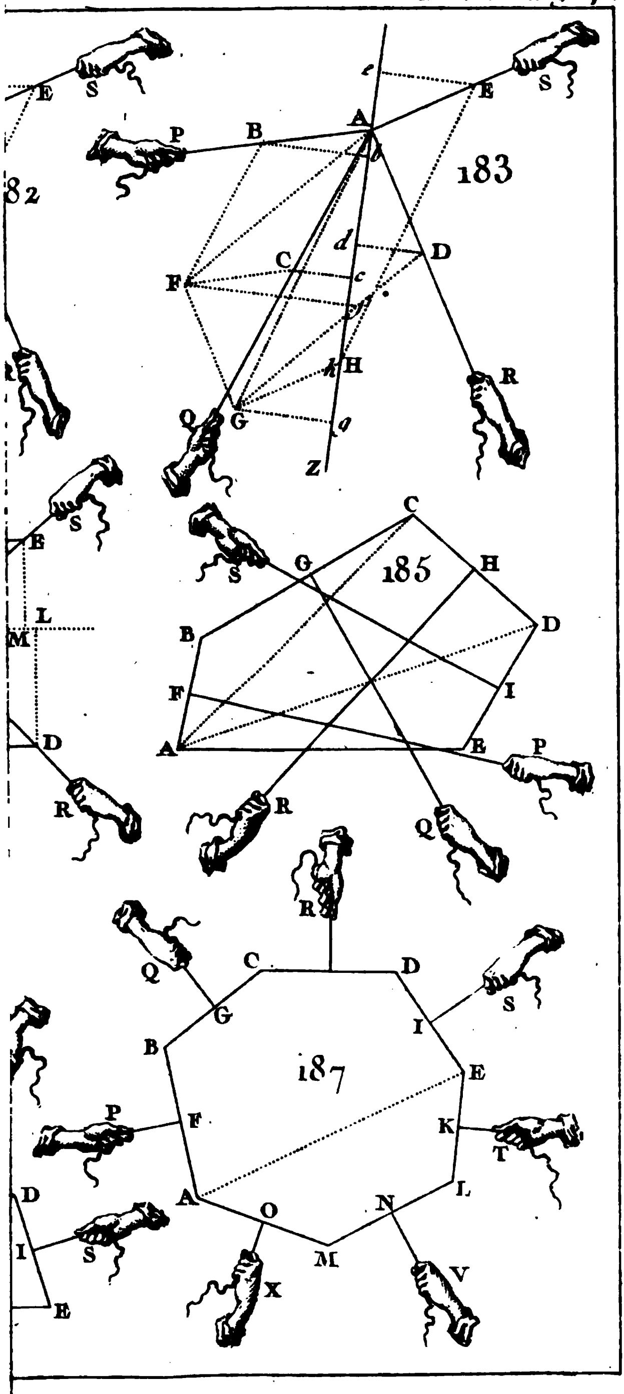
162

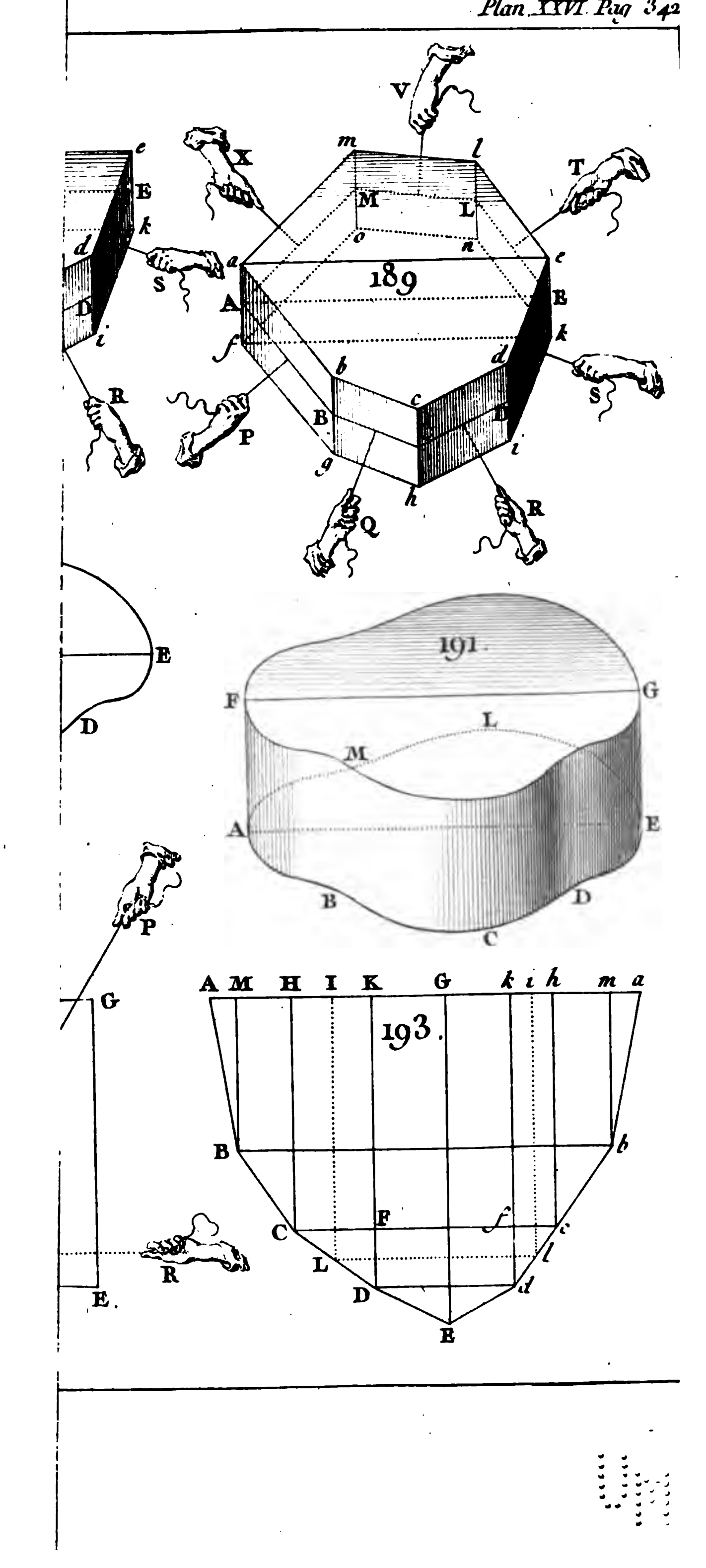
163


165
167
168
169
170
171
172
173



175
O
N
R
Q
176
R
P
O
M
N
Q
177
P
B
A
E
S
F
C
D
Q
G
H
R
E
S
D
R
179
B
A
E
S
P
I
L
K
D
F
C
H
R
Q
G
F
G
K
E
H
B
181
L
A
C
N
M
D
Z
E
H
A
L
M
D
N
Z


183
185
187
82


189
191
193
A
B
C
D
E
F
G
L
M
P
Q
R
S
T
V
X

196

195

CHAPITRE II.

De la composition & décomposition des Forces dont les directions sont situées dans différens plans, & ne peuvent pas être réduites à un même plan.

PROBLEME.

276. *Réduire à deux forces trois puissances* P, Q, R *appliquées à un corps* A B C, *& dont les directions sont dans différens plans.* Fig. 197, 198 & 199.

SOLUTION.

Ce Problème peut avoir une infinité de solutions différentes : on en va expliquer quelques-unes pour servir d'exemples.

I.

Ayant mené suivant la direction *A P* de l'une des puissances données, un plan quelconque *Y Z* auquel les directions des deux autres puissances Q, *R* ne soient point parallèles, afin que les directions de ces deux dernières puissances rencontrent ce plan en deux points *B*, *C* : on mènera aussi suivant les directions *B D*, *C E* des puissances Q, *R*, deux plans *B G D F*, *C I E H* qui couperont le premier plan suivant deux droites *B G*, *C I*. Quoique les situations de ces deux plans par rapport au plan *Y Z* soient arbitraires, il sera presque toûjours plus commode de mener ces plans perpendiculairement au plan *Y Z*, & nous les supposerons tels dans cette première solution. Fig. 197.

Les choses étant ainsi disposées, & les deux puissances Q, *R* étant représentées par des parties *B D*, *C E* de leurs directions, qui leur soient proportionnelles; on décomposera la puissance Q en deux autres forces *B G*, *B F* perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'une *B G* sera dirigée suivant la section commune des deux plans *G F*, *Y Z*, & l'autre *B F* sera perpendiculaire au plan *Y Z*. On décomposera pareillement la puissance *R* en deux forces *C I*, *C H* aussi perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'une *C I* sera dirigée suivant la section commune des deux plans *I H*, *Y Z*, & l'autre *C H* perpendiculairement au plan *Y Z*.

Les deux puissances Q, *R* étant ainsi décomposées en quatre forces représentées, tant pour leurs quantités que pour leurs directions, par quatre droites *B G*, *B F*, *C I*, *C H*, dont deux *B F*, *C H* sont perpendiculaires au plan *Y Z* & par conséquent parallèles entr'elles, & dont les deux autres *B G*, *C I* sont dans le même plan *Y Z*; il est évident qu'on pourra les réduire à deux forces seulement, comme on va l'expliquer.

On mènera dans le plan *Y Z* une droite *B C*, & l'ayant divisée en *L* de manière que l'on ait $BL : CL :: CH : BF$ ou $BC : CL :: BF + CH : BF$, on élèvera par le point *L* une droite *L K* perpendiculaire au plan *Y Z*, & égale à la somme des deux lignes *B F*, *C H*; & cette droite *L K* représentera la quantité de force & la direction de la résultante des deux forces représentées par *B F*, *C H*.

Les deux autres forces représentées par *B G*, *C I* étant dirigées dans le plan *Y Z*, il est facile d'en trouver la résultante par les règles qu'on a données dans le Chapitre précédent. Pour cela, ayant prolongé les

directions *B G*, *C I* de ces deux forces, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en quelque point *M*, ce qu'elles feront toûjours à moins qu'elles ne soient parallèles; on prendra sur ces lignes, à commencer du point *M*, deux parties *M&*, *M S* égales aux deux lignes *B G*, *C I*; puis ayant tiré *S T*, *&T* parallèlement à *M&*, *M S*, on aura un parallèlogramme *M S T &* dont la diagonale *M T* représentera la quantité de force & la direction de la résultante des deux forces exprimées par *B G*, *C I*.

Comme la diagonale ou la résultante *M T* des deux forces *M&*, *M S* est dans le même plan que ces deux forces composantes, & par conséquent dans le plan *Y Z*, & que la direction de la puissance *P* est (*constr.*) dans le même plan; on pourra, par les règles expliquées dans le Chapitre précédent, réduire à une seule force la puissance *P* & la résultante *M T* des deux forces *B G*, *C I* ou *M&*, *M S*. Pour faire cette réduction, on prolongera les deux lignes *M T*, *A P*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en quelque point *V*, ce qu'elles feront toûjours à moins qu'elles ne soient parallèles; & l'on prendra sur ces deux lignes, à commencer du point *V*, deux parties *V N*, *V O*, la première *V N* égale à la proportionnelle qui doit représenter la puissance *P*, & la seconde *V O* égale à *M T*; puis ayant mené par les points *N*, *O*, des droites *N X*, *O X* parallèles à *V T*, *V P*, on aura un parallélogramme *V N X O* dont la diagonale *V X* représentera la résultante de la puissance *P* & de la force représentée par *V O* ou par *M T*: & comme la force représentée par *M T* est la résultante des deux forces représentées par *B G* & par *C I*, la diagonale *V X* représentera la résultante de la puissance *P*

& des deux forces représentées par *BG* & par *CI*.

On a donc réduit les trois puissances *P*, *Q*, *R* qui sont dans différens plans, à deux forces représentées par les deux droites *LK*, *VX*, dont l'une *LK* est perpendiculaire au plan *YZ*, & l'autre *VX* est dans ce plan. *C. Q. F. T.*

Si les directions des deux forces représentées par BG, CI *eussent été parallèles, on auroit trouvé leur résultante* MT (n°. 248), *comme on a trouvé celle* LK *des deux forces parallèles représentées par* BF, CH: *& si la direction de la puissance* P, *& celle de la résultante* MT *des deux forces* BG, CI *se fussent trouvées parallèles, on auroit pareillement déterminé leur résultante comme il a été expliqué* (n°. 248).

II.

Fig. 198. On mènera, comme dans la première solution, suivant la direction de la puissance *P* un plan quelconque *YZ* qui ne soit parallèle à la direction d'aucune des deux puissances *Q*, *R*, afin que les directions de ces deux puissances le puissent rencontrer en deux points *B*, *C*. Puis ayant tiré la droite *BC* qui sera dans le plan *YZ*, on prolongera la direction de la puissance *P* jusqu'à ce qu'elle rencontre cette droite en quelque point *A*; & l'on représentera les trois puissances *P*, *Q*, *R* données de grandeur & de direction, par des parties *AD*, *BE*, *CF* de leurs directions, en faisant ces parties proportionnelles à ces puissances.

Ensuite considérant que la puissance *P* représentée par *AD* peut être regardée comme la résultante de deux forces qui lui sont parallèles, on la décomposera en deux forces parallèles représentées par *BG*, *CI* qui seront dans le plan *YZ* aussi-bien que leur

résultante *P* représentée par *A D*. Pour cela, on fera *B C* : *C A* : *B A* :: *A D* : *B G* : *C I*; alors au lieu des trois puissances *P*, *Q*, *R* représentées par *A D*, *B E*, *C F*, on aura quatre forces représentées par *B E*, *B G*, *C F*, *C I*.

Les deux forces représentées par *B E*, *B G* ayant des directions qui se rencontrent en un point *B*, pourront être réduites à une seule force, en menant par les extrémités *E*, *G* de leurs proportionnelles des parallèles *E H*, *G H* à leurs directions; puisqu'on aura un parallélogramme *B E H G* dont la diagonale *B H* représentera (*n°*. 228) la force résultante de celles qui sont représentées par *B E*, *B G*.

Les deux forces représentées par *C F*, *C I* ayant des directions qui se rencontrent en un point *C*, seront réduites à une résultante représentée par la diagonale *C K* d'un parallélogramme *C I K F* qui aura pour côtés contigus les deux droites *C F*, *C I*.

Les trois puissances *P*, *Q*, *R* exprimées par les trois lignes *A D*, *B E*, *C F*, & dont on a fait d'abord quatre forces représentées par *B G*, *B E*, *C I*, *C F*, seront donc réduites à deux forces seulement représentées par les deux lignes *B H*, *C K*. C. Q. F. T.

III.

On mènera, comme dans les deux solutions précédentes, suivant la direction de la puissance *P* un plan quelconque *Y Z* qui soit rencontré en deux points *B*, *C* par les directions des deux autres puissances *Q*, *R*. Puis par les deux points *B*, *C*, & par un point quelconque *A* de la direction de la puissance *P*, on mènera deux droites *B A M*, *C A N*; & l'on représentera les trois puissances *P*, *Q*, *R* données de gran- Fig. 199.

deur & de direction, par des parties *A D*, *B E*, *C F* de leurs directions, en faisant ces parties proportionnelles à ces puissances.

Sur la droite *A D* comme diagonale on fera un parallélogramme *A M D N*, en menant par le point *D* des parallèles *D N*, *D M* aux deux droites *B A M*, *C A N*; & au lieu de la puissance *P* représentée par la diagonale *A D* du parallélogramme *A M D N*, on prendra deux autres forces représentées par les côtés contigus *A M*, *A N* de ce parallélogramme : & faisant ensuite *B G* = *A M*, *C I* = *A N*, au lieu des trois puissances *P*, *Q*, *R* représentées par *A D*, *B E*, *C F*, on aura quatre forces représentées par les quatre droites *B G*, *B E*, *C I*, *C F* qui concourront deux à deux aux deux points *B*, *C*.

Enfin sur *B G*, *B E*, comme côtés contigus, ayant fait un parallélogramme *B G H E*, & ayant construit pareillement sur *C I*, *C F* comme côtés contigus un second parallélogramme *C I K F*; on mènera les deux diagonales *B H*, *C K* qui représenteront les résultantes des quatre forces exprimées par *B G*, *B E*, *C I*, *C F* ou des trois puissances proposées *P*, *Q*, *R*.

Les trois puissances *P*, *Q*, *R* dirigées dans trois plans différens seront donc réduites à deux forces seulement représentées par *B H*, *C K*. C. Q. F. T.

Enfin on pourra toujours réduire toutes les forces à deux résultantes seulement, dont l'une sera dans un plan quelconque que toutes ces puissances rencontreront, & l'autre sera perpendiculaire à ce plan. Car chacune des forces qui rencontreront ce plan pourra se décomposer en deux autres, dont l'une sera dans ce plan, & l'autre perpendiculaire au même plan. Or

toutes celles qui seront dans ce plan se réduiront à une seule force, & celles qui seront perpendiculaires à ce plan, étant parallèles, se réduiront aussi à une même force.

Corollaire I.

277. Donc si l'on a plus de trois puissances dont les directions soient dans différens plans, on pourra toûjours les réduire à deux forces seulement. Pour cela, on réduira d'abord les trois premières puissances à deux forces; ensuite ces deux forces & la quatrième puissance seront encore réduites à deux autres forces seulement; ces deux nouvelles forces avec la cinquième puissance seront pareillement réduites à deux forces résultantes: & continuant de réduire ainsi les puissances données jusqu'à la dernière, on parviendra à n'en faire que deux forces résultantes qui feront le même effet que toutes les puissances données ensemble.

On pourra même, si on le juge à propos, réduire toutes les puissances données à deux résultantes, dont l'une sera dans un plan mené par la direction de la puissance qu'on voudra, & l'autre perpendiculaire au même plan. Car suivant la première solution, les trois premières puissances seront réduites à deux résultantes dont l'une sera dans le plan de l'une de ces puissances, & l'autre perpendiculaire à ce plan. Ces deux résultantes & une troisième puissance étant considérées comme trois nouvelles puissances, & l'une d'elles étant dans le plan qu'on a mené par une des trois premières, pourront aussi se réduire à deux nouvelles résultantes dont l'une sera dans le même plan, & l'autre perpendiculaire à ce plan. Il en sera de même des autres puissances qui, avec les deux résultantes

précédemment trouvées, feront fucceffivement réduites à deux réfultantes feulement.

COROLLAIRE II.

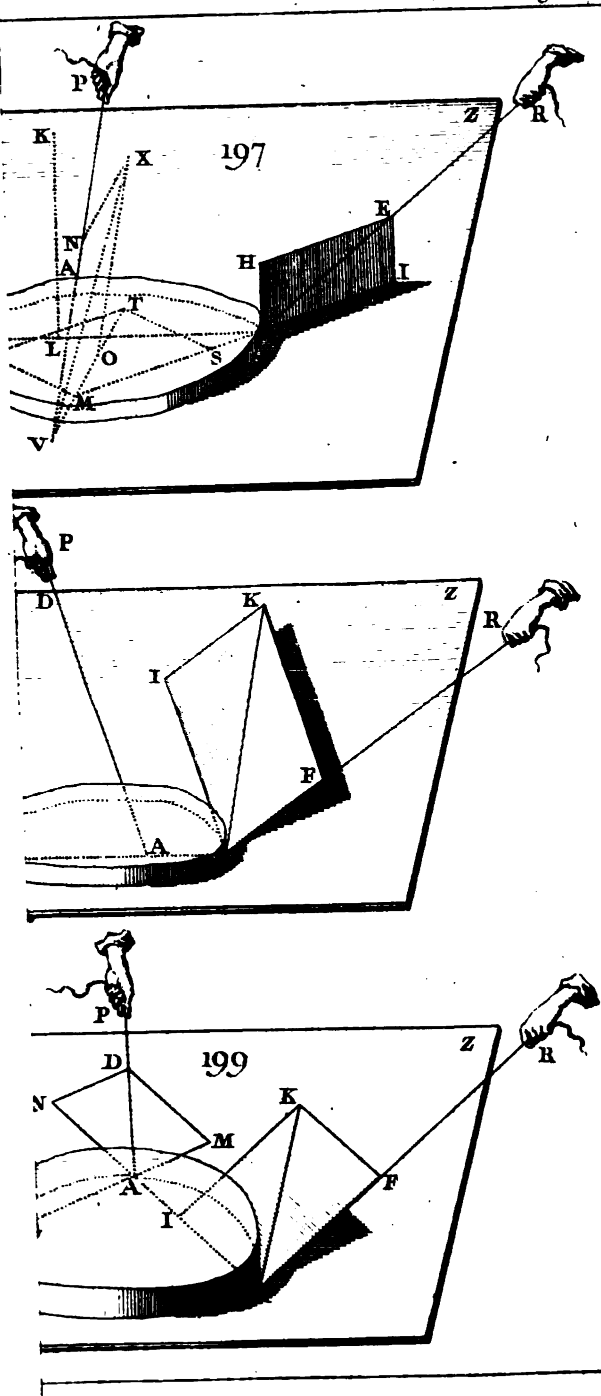
278. Si les deux réfultantes aufquelles feront réduites toutes les puiffances dirigées dans différens plans, ont des directions qui concourent en un même point, ou fi dans les deux dernières folutions ces deux réfultantes ont des directions parallèles, on pourra toûjours les réduire à une feule force réfultante par quelqu'une des méthodes qu'on a expliquées dans le Chapitre précédent. Ainfi toutes les puiffances propofées, quoique dirigées dans différens plans, fe réduiront à une feule force réfultante; & il ne faudra qu'une feule force égale & directement oppofée à cette réfultante pour les contrebalancer toutes.

Mais fi les directions des deux forces réfultantes de toutes les puiffances propofées ne concourent pas dans un même point ou ne font point parallèles, ces deux réfultantes ou les forces dont elles font compofées ne pourront pas être réduites à une feule réfultante; & pour les arrêter il faudra employer au moins deux forces égales & directement oppofées à ces réfultantes.

COROLLAIRE III.

279. Si toutes les puiffances dirigées dans différens plans font en équilibre, il faudra néceffairement que les deux forces réfultantes aufquelles on les réduira fe détruifent mutuellement: ainfi ces deux réfultantes feront égales & directement oppofées.

Fin du Tome premier de la Méchanique Statique.


P
R
Z
K
X
197
E
N
H
A
I
T
L
O
S
M
V
P
D
K
Z
R
I
F
A
P
D
199
Z
R
N
K
M
F
A
I

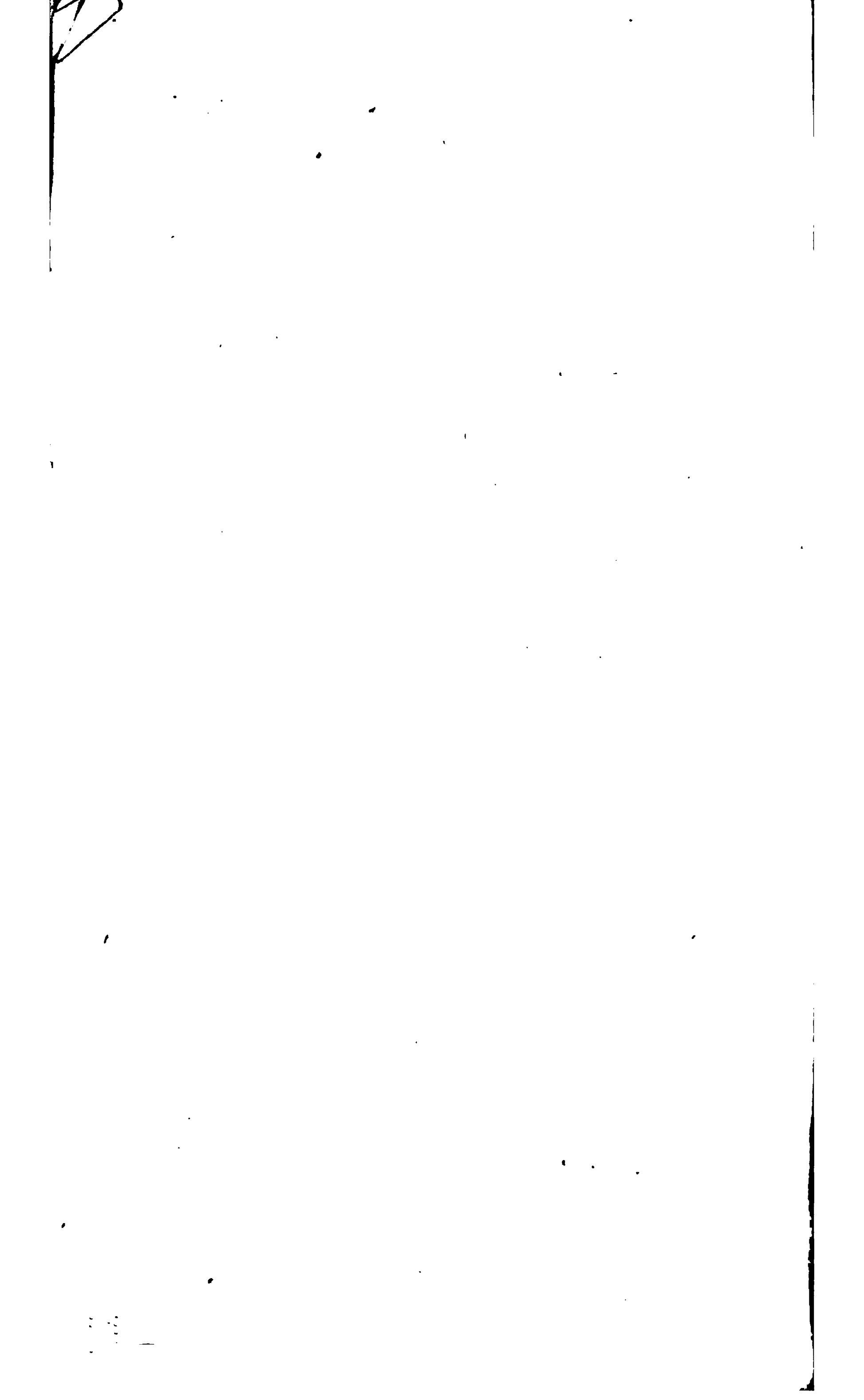


TABLE.

NOTIONS PRELIMINAIRES.

LIVRE PREMIER.

Des Centres de Gravité.

Pour

Des voustes d'areste . . . 252

De la solidité des voustes. 264

LIVRE II.